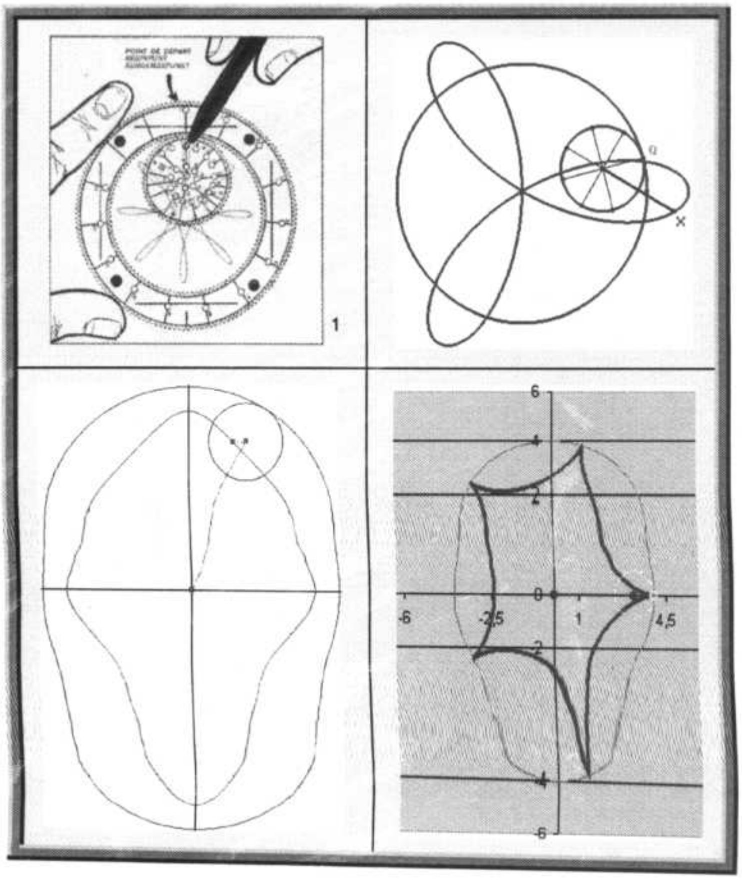
Gerhard Hainscho

Rollkurven - Vom Spiel zum PC

Abstract

Ein Kreis rollt auf einer Geraden oder *auf* bzw. *in* einem anderen Kreis - welche Bahnen beschreiben mitbewegte Punkte? Bewegungen und Kurven dieser Art werden sowohl spielerisch erforscht als auch mit Hilfe geeigneter Software (Cabri, Derive, Excel, ...) am PC dargestellt und diskutiert. Ausblicke auf historische Hintergründe und mathematische Vertiefungen sowie Hinweise für die Unterrichtspraxis werden gegeben.



[1] Bildquelle: http://www.isb.bayern.de/gym/math_inf/akses/[illegible]

Motivation

Durch den möglich gewordenen Einsatz moderner Technologien im Mathematikunterricht haben sich manche Schwerpunkte verschoben, so sind z.B. rekursive Funktionen oder Funktionen in Parameterform stärker in den Vordergrund getreten - moderne Technologien erleichtern gleichermaßen ihre Darstellung wie das Operieren mit ihnen. Der neue Lehrplan für die AHS-Oberstufe fördert diese Entwicklung: Die Nutzung von Technologien ist in den didaktischen Grundsätzen fest verankert; Parameterformen - von denen hier speziell die Rede sein soll - sind im Lehrstoff der 7. Klasse verbindlich für alle Schulformen vorgesehen.

AHS-Lehrplan 2004

Didaktische Grundsätze

Lernen mit technologischer Unterstützung

Mathematiknahe Technologien wie Computeralgebra-Systeme, dynamische Geometrie-Software oder Tabellenkalkulationsprogramme sind im heutigen Mathematikunterricht unverzichtbar. Sachgerechtes und sinnvolles Nutzen der Programme durch geplantes Vorgehen ist sicherzustellen.

Die minimale Realisierung besteht im Kennenlernen derartiger Technologien, das über exemplarische Einblicke hinausgeht und zumindest gelegentlich eine wesentliche Rolle beim Erarbeiten und Anwenden von Inhalten spielt. Bei der maximalen Realisierung ist der sinnvolle Einsatz derartiger Technologien ein ständiger und integraler Bestandteil des Unterrichts.

Lehrstoff

7. Klasse - Nichtlineare analytische Geometrie

- Beschreiben von ebenen Kurven durch Parameterdarstellungen
- *Beschreiben von Raumkurven und Flächen durch Parameterdarstellungen*

Doch welche Kurven *sollen* in Parameterform dargestellt werden? Viele Antworten sind möglich, viele Kurven von Interesse. Warum nicht Althergebrachtes neu für den Unterricht entdecken? Genau das soll hier mit Zykloiden und anderen Rollkurven geschehen.

Grundsätzlich gibt es zwei Zugänge zum Einsatz technologischer Unterstützung im Unterricht:

- Man sucht nach Aufgaben, die man mit Hilfe einer bestimmten zur Verfügung stehenden Technologie bearbeiten kann.
- Man sucht nach Technologien, die hilfreich sind für die Bearbeitung und Umsetzung seiner Ziele.

Der zweite Weg erscheint sinnvoller, wenn auch mühsamer, erfordert er doch einen gewissen Überblick über verfügbare Werkzeuge *und* eine reflektierte Unterrichtsplanung.

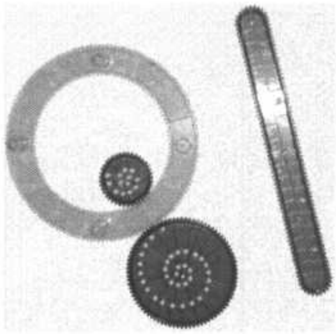
Die vorliegende Arbeit soll es zumindest erleichtern, sich einen Überblick darüber zu verschaffen, welche Möglichkeiten Dynamische Geometrie Software (z.B. Cabri), Computeralgebra-Systeme (z.B. Derive) sowie Tabellenkalkulations-Software (z.B. Excel) für das Thema Rollkurven bieten. Ergänzt wird dieser Überblick durch Aufgaben mit kommentierten Lösungsvorschlägen sowie einer Formelsammlung für Kurven in Parameterdarstellung aus der eigenen Unterrichtspraxis in Klassen mit CAS-Rechnern (derzeit Voyage 200).

Dabei darf nicht vergessen werden, dass

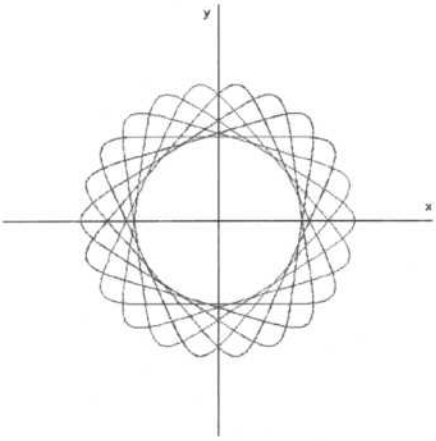
- kein Vortrag und keine Demonstration so ertragreich sein kann wie die eigene Tätigkeit und
- jedes Werkzeug nicht nur das Produktdesign beeinflusst, sondern auch die Vorstellungen darüber, was sinnvoll und möglich ist, in dem verändert, der es verwendet - moderne Technologien also unsere Sichtweise von der Mathematik wandeln und letztlich uns selbst.

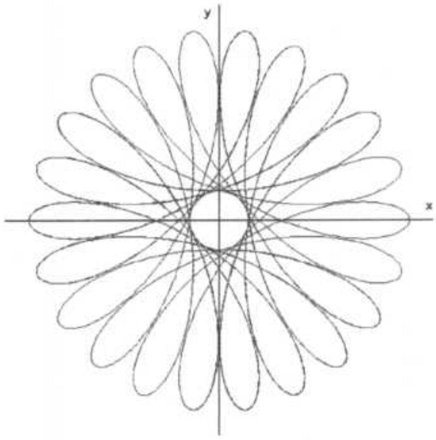
Spirograph

Zu Beginn soll eine spielerische Auseinandersetzung mit dem Thema Rollkurven erfolgen. Mit Hilfe von „Spirograph“, einem Zeichengerät bestehend aus Zahnrädern in verschiedenen Größen mit Löchern in unterschiedlichen Abständen vom Zentrum, durch die man einen Zeichenstift stecken kann, lassen sich vielfältige Muster gestalten.



In der Folge soll versucht werden, solche Muster am PC nachzuvollziehen. Die Vorteile sind klar: es gibt kein Verrutschen der Teile, zudem hat man völlige Freiheit in der Wahl der Position des „Zeichenstiftes“.





Hinweis: Rollkurven dieser Art werden hier als **Zykloiden** (ein Kreis rollt auf einer Geraden), **Epizykloiden** (ein Kreis rollt *auf* einem anderen Kreis) und **Hypozykloiden** (ein Kreis rollt *in* einem anderen Kreis) bezeichnet, es sind für dieselben Kurven aber auch andere Namen gebräuchlich, z.B. Trochoiden bzw. Epi- und Hypotrochoiden, Auf- und Inradlinien und andere. Ursache dieser „Sprachverwirrung“ ist die Sitte, Namen mit griechisch/lateinischen Wurzeln zu verwenden; eine Suche in Latein-Wörterbüchern nach Begriffen für Kreise bzw. periodische Prozesse fördert jedoch eine unerwartet große Vielfalt zu Tage, z.B.:

- cyclus = Kreis
- trochus = Reif (Spielzeug, manchmal mit Schellen besetzt)
- circulus = Kreis, Ring, Zirkel
- corona = Kranz, Krone, Kreis (von Zuhörern)
- gyrus = Windung, Ring, Kreisbewegung
- orbis = Kreis, Rundung, Umkreis, Scheibe, Rad
- turbo = Wirbel(wind), Kreisel, Wirrwarr, Turbine

Dynamische Geometrie Software

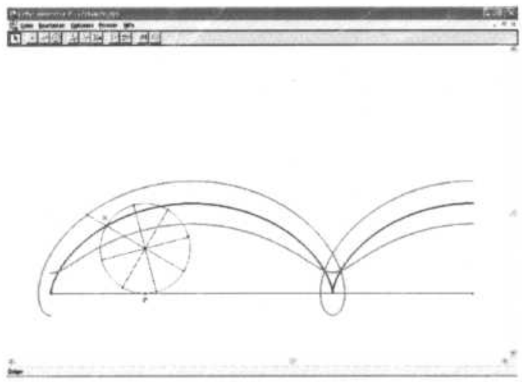
Das Angebot an Dynamischer Geometrie Software (DGS) ist groß. Systeme wie Cabri Géomètre, Geometer's Sketchpad, Cinderella, Euklid, Geolog, GeoneXt, Zirkel und Lineal und andere ermöglichen es zunächst, jede „mit Zirkel und Lineal" durchführbare Konstruktion am PC anzufertigen. Darüber hinaus bieten sie diverse Möglichkeiten der

- Variation konstruierter Objekte,
- Messung von Strecken, Winkeln, Flächeninhalten, Koordinaten und Gleichungen,
- Konstruktion von Spuren bzw. Ortskurven sowie der
- Konstruktion von Makros im Sinne des modularen Arbeitens.

Zumindest Cabri bietet auch die für Rollbewegungen interessante Option, Kreisbögen gegebener Länge zu konstruieren.

Noch vor jeder Mathematisierung - jedenfalls vor einer Beschreibung der untersuchten Kurven durch Gleichungen - lassen sich also Rollbewegungen am PC simulieren und untersuchen.
Konstruktionen dieser Art dienen nicht bloß der Veranschaulichung, sie fördern vielmehr das Verständnis von Abhängigkeiten, Regeln und Zusammenhängen und somit empirisches *und* theoretisches Denken[2]; sie ermöglichen auch „Forschungsaufgaben" und damit eigene Entdeckungen und wecken oft ein starkes „Beweisbedürfnis", wozu ein traditioneller Lehrervortrag keineswegs immer imstande ist.

Im Folgenden werden Vorschläge zur Konstruktion von Zykloiden, Epizykloiden und Hypozykloiden mit Hilfe von Cabri kurz beschrieben. Von mäßig fortgeschrittenen Cabri-Kennern sollten sie interaktiv gelesen, d.h. am eigenen PC nachvollzogen und gegebenenfalls erweitert werden.



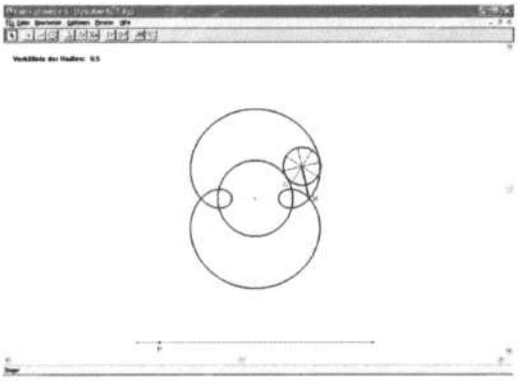
Zykloiden

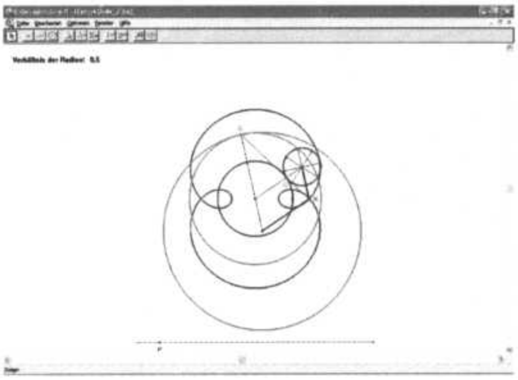
1. 2 x Punkt setzen; Strecke AB zeichnen
2. Punkt P auf Strecke wählen
3. Normale n auf AB durch P legen, Kreismittelpunkt auf n wählen
4. Kreis M, P zeichnen
5. Entfernung AP messen
6. Maß übertragen: *diese Zahl - dieser Kreis - dieser Punkt*
7. Geradenspiegelung:
   X = konstruierter Punkt gespiegelt an n
8. Hilfspunkt, Zahl und n verstecken
9. Radspeichen darstellen und weitere Punkte Y, Z auf XM wählen:
   Gerade XM, Normale darauf und Winkelsymmetralen konstruieren, mit Kreis schneiden;
   Punkte Y, Z auf XM wählen, Geraden verstecken und durch Strecken ersetzen;
   Strecken YM und ZM zeichnen
10. Ortskurven von X, Y, Z, wenn sich P (entlang der Strecke) bewegt; P animieren; Punkte Y und Z variieren

Denkaufgabe: An jedem noch so schnell fahrenden Zug gibt es Punkte, die sich immer wieder für kurze Zeit gegen die Fahrtrichtung bewegen. Welche sind das?[3]
(Antwort: Punkte, die aufgrund der Form der Zugräder bei jeder Umdrehung für kurze Zeit unterhalb der Schienen-Oberkante zu liegen kommen, bewegen sich in dieser Zeit „rückwärts". Ihre Bahnen sind geschlungene Zykloiden.)

---

[2] Kautschitsch 1985. S 74 - 77.
[3] Freyer u.a. 1989. S 27, S 69.





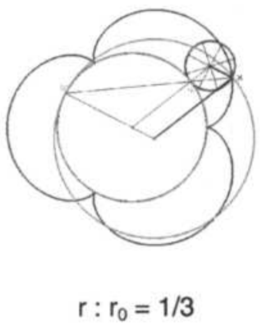
Epizykloiden

1. 2 x Punkt setzen; Strecke AB zeichnen
2. Punkt P auf Strecke wählen
3. M_0 wählen, ruhenden Kreis k_0 zeichnen
4. Parallele zu AB durch M_0 zeichnen, mit k_0 schneiden, verstecken
5. Entfernung AP messen
6. Q konstruieren durch Maß übertragen: *diese Zahl - dieser Kreis - dieser Punkt*
7. Gerade durch M_0 und Q legen
8. Radius r_0 messen
9. numerische Eingabe: Verhältnis der Radien $r : r_0$
10. Berechnung von $r = r_0 \cdot$ Eingabe
11. Maß r von Q aus an beliebige Stelle übertragen: *diese Zahl - dieser Punkt*; Hilfskreis zeichnen, mit Gerade schneiden; Gerade, Hilfskreis, Hilfspunkt, Maß r_0 und Rechenergebnis verstecken
12. bewegten Kreis k (M, Q) zeichnen
13. neuerlich Maß AP auf k ab Q übertragen: *diese Zahl - dieser Kreis - dieser Punkt*
14. Gerade durch M und konstruierten Punkt legen, X als Punkt auf g wählen und Radspeichen darstellen: Normale auf g und Winkelsymmetralen konstruieren, mit Kreis schneiden; Geraden verstecken und durch Strecken ersetzen; Maß AP verstecken; Strecke XM zeichnen
15. Ortskurve von X, wenn sich P (entlang der Strecke) bewegt; P animieren; X und Verhältnis der Radien variieren

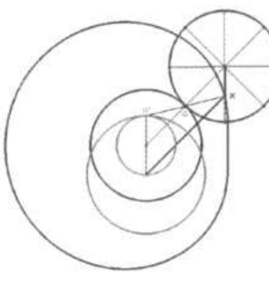
Mit Hilfe von Cabri kann man sich leicht davon überzeugen, dass jede Epizykloide durch zwei verschiedene Bewegungen erzeugt wird:

Die Mittelpunkte der ruhenden Kreise sind identisch. Ergänzt man M_0MX zu einem Parallelogramm M_0MXM', so erhält man den Mittelpunkt M' eines neuen bewegten Kreises. Neuer fester und neuer bewegter Kreis berühren einander im Schnittpunkt von M_0M' mit XQ; damit sind auch die neuen Radien r_0' und r' bekannt.[4]

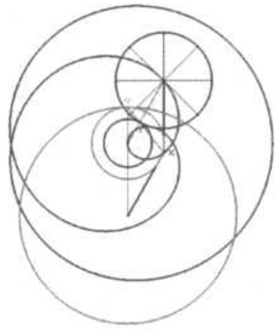
Aufgabe: Konstruiere folgende Epizykloiden und variiere die Lage des Punktes X.



$r : r_0 = 1/3$



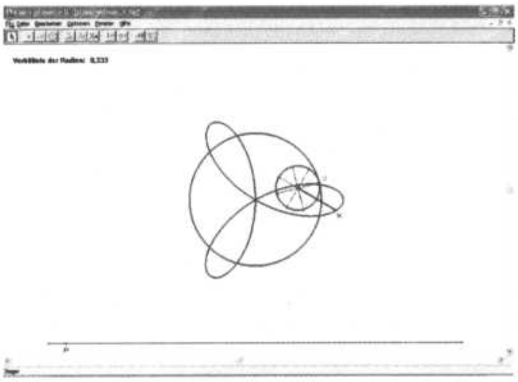
$r : r_0 = 1$

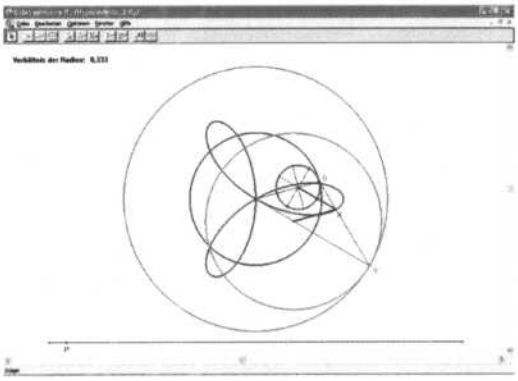


$r : r_0 = 2$

Forschungsaufgabe: Erkennst du einen Zusammenhang zwischen den Verhältnissen $r : r_0$ und $r' : r_0'$? *(Vermutung: $r' : r_0' = 1 + r : r_0$)*

[4] Hohenberg 1966. S 256 - 257.



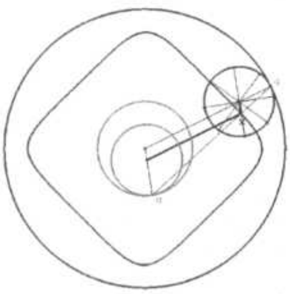


Hypozykloiden

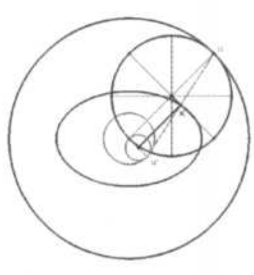
1. 2 x Punkt setzen; Strecke AB zeichnen
2. Punkt P auf Strecke wählen
3. M_0 wählen, ruhenden Kreis k_0 zeichnen
4. Parallele zu AB durch M_0 zeichnen, mit k_0 schneiden, verstecken
5. Entfernung AP messen
6. Q konstruieren durch Maß übertragen: *diese Zahl - dieser Kreis - dieser Punkt*
7. Gerade durch M_0 und Q legen
8. Radius r_0 messen
9. numerische Eingabe: Verhältnis der Radien $r : r_0$
10. Berechnung von $r = r_0 \cdot$ Eingabe
11. Maß r von Q aus an beliebige Stelle übertragen: *diese Zahl - dieser Punkt*; Hilfskreis zeichnen, mit Gerade schneiden; Hilfskreis, Hilfspunkt, Maß r_0 und Rechenergebnis verstecken
12. bewegten Kreis k (M, Q) zeichnen
13. neuerlich Maß AP auf k ab Q übertragen: *diese Zahl - dieser Kreis - dieser Punkt;* konstruierten Punkt an MQ spiegeln; Hilfspunkt und Gerade verstecken
14. Gerade durch M und neuen Punkt legen, X als Punkt auf g wählen und Radspeichen darstellen: Normale auf g und Winkelsymmetralen konstruieren, mit Kreis schneiden; Geraden verstecken und durch Strecken ersetzen; Hilfspunkt und Maß AP verstecken; Strecke XM zeichnen
15. Ortskurve von X, wenn sich P (entlang der Strecke) bewegt; P animieren; X und Verhältnis der Radien variieren

Wie Epizykloiden lassen sich auch Hypozykloiden jeweils doppelt erzeugen. Die Konstruktion neuer fester und neuer bewegter Kreise erfolgt analog.

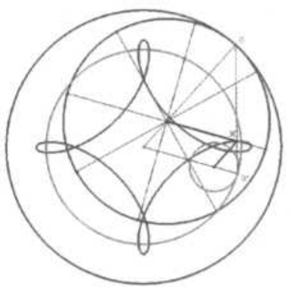
Aufgabe: Konstruiere folgende Hypozykloiden und variiere die Lage des Punktes X.



$r : r_0 = 1/4$



$r : r_0 = 1/2$



$r : r_0 = 3/4$

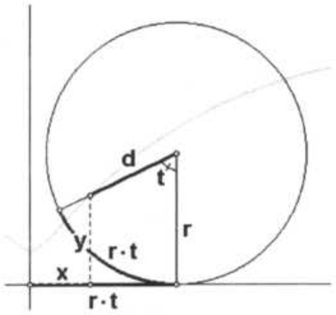
Forschungsaufgabe: Erkennst du einen Zusammenhang zwischen den Verhältnissen $r : r_0$ und $r' : r_0'$? *(Vermutung: $r' : r_0' = | 1 - r : r_0 |$)*

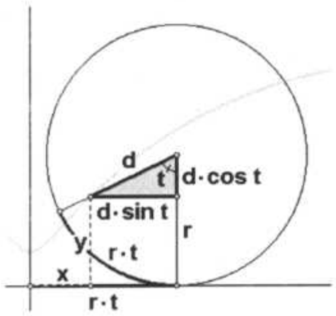
Gleichungen in Parameterform

Für eine Darstellung von Kurven mit Hilfe von Computeralgebra-Systemen oder Tabellenkalkulations-Software ist die Kenntnis ihrer Gleichungen erforderlich.

Im Folgenden werden Vorschläge zur Herleitung der Gleichungen von Zykloiden, Epizykloiden und Hypozykloiden beschrieben. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis folgender Grundeigenschaft von Rollbewegungen:

Rollen zwei Kurven aufeinander, so sind die Längen abrollender Bogenstücke gleich groß.





Zykloiden

Ein Kreis mit Radius r rollt auf einer Geraden; welche Eigenschaften gelten für die Koordinaten (x, y) eines mitbewegten Punktes im Abstand d vom Kreismittelpunkt?

Wählt man den „Wälzwinkel" als Parameter t (im Bogenmaß gemessen), so hat der abgerollte Bogen die Länge $r \cdot t$; gleichzeitig ist dies der Abstand des Kreismittelpunktes von der y-Achse.

Wählt man d als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, so ergeben sich für Gegen- und Ankathete von t die Längen $d \cdot \sin t$ bzw. $d \cdot \cos t$.

Damit lassen sich x und y ausdrücken:

$x = r \cdot t - d \cdot \sin t$

$y = r - d \cdot \cos t$

und man erhält die Gleichung einer Zykloide in Parameterform:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot t - d \cdot \sin t \\ r - d \cdot \cos t \end{pmatrix}}$$

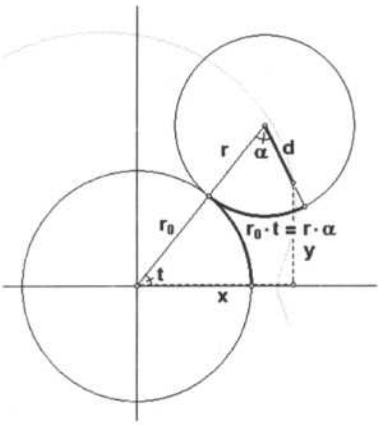
Nach ihrer Form unterscheidet man gestreckte, gespitzte und geschlungene Zykloiden. Es gilt:

$d < r$... gestreckte Zykloide
$d = r$... gespitzte Zykloide
$d > r$... geschlungene Zykloide

Im Gegensatz zu Zykloiden ist bei Epizykloiden und Hypozykloiden nicht von vorneherein klar, welcher Winkel als Parameter gewählt werden soll. Tatsächlich scheinen in der Literatur - je nach Entscheidung für einen Parameter - verschiedene Versionen der Kurvengleichung auf.

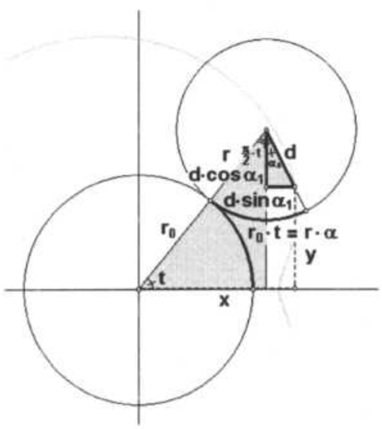
Epizykloiden

Ein Kreis mit Radius r rollt *auf* einem anderen Kreis mit Radius r_0; welche Eigenschaften gelten für die Koordinaten (x, y) eines mitbewegten Punktes im Abstand d vom Mittelpunkt des rollenden Kreises?



Wählt man den oben so bezeichneten Winkel t (im Bogenmaß gemessen) als Parameter, so ergeben sich gleiche Bogenlängen $r_0 \cdot t = r \cdot \alpha$.

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{r_0}{r} \cdot t$$



Wählt man d als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, so ergeben sich für Gegen- und Ankathete von α_1 die Längen $d \cdot \sin \alpha_1$ bzw. $d \cdot \cos \alpha_1$, wobei gilt:

$$\alpha_1 = \alpha - (\frac{\pi}{2} - t) = \frac{r_0}{r} \cdot t - \frac{\pi}{2} + t = (\frac{r_0}{r} + 1) \cdot t - \frac{\pi}{2}$$

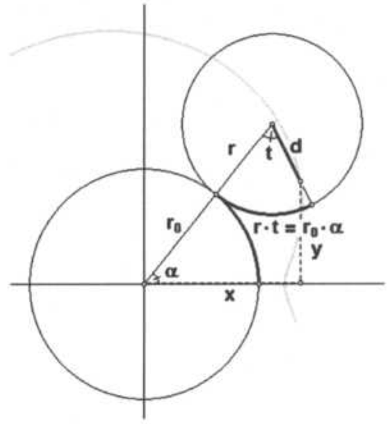
$$\alpha_1 = -(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 + r}{r} \cdot t)$$

$$x = (r_0 + r) \cdot \cos t + d \cdot \sin \alpha_1$$

$$x = (r_0 + r) \cdot \cos t + d \cdot \sin(-(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 + r}{r} \cdot t))$$

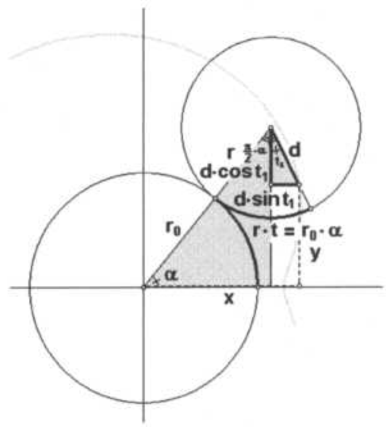
$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad x = (r_0 + r) \cdot \cos t - d \cdot \cos(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t)$$



Wählt man den oben so bezeichneten Winkel t (im Bogenmaß gemessen) als Parameter, so ergeben sich gleiche Bogenlängen $r \cdot t = r_0 \cdot \alpha$.

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{r}{r_0} \cdot t$$



Wählt man d als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, so ergeben sich für Gegen- und Ankathete von t_1 die Längen $d \cdot \sin t_1$ bzw. $d \cdot \cos t_1$, wobei gilt:

$$t_1 = t - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = t - \frac{\pi}{2} + \frac{r}{r_0} \cdot t = (1 + \frac{r}{r_0}) \cdot t - \frac{\pi}{2}$$

$$t_1 = -(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 + r}{r_0} \cdot t)$$

$$x = (r_0 + r) \cdot \cos \alpha + d \cdot \sin t_1$$

$$x = (r_0 + r) \cdot \cos(\frac{r}{r_0} \cdot t) + d \cdot \sin(-(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 + r}{r_0} \cdot t))$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad x = (r_0 + r) \cdot \cos(\frac{r}{r_0} \cdot t) - d \cdot \cos(\frac{r_0 + r}{r_0} \cdot t)$$

$y = (r_0 + r) \cdot \sin t - d \cdot \cos \alpha_1$

$y = (r_0 + r) \cdot \sin t - d \cdot \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 + r}{r} \cdot t\right)\right)$

$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\Rightarrow \; y = (r_0 + r) \cdot \sin t - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t\right)$

Man erhält folgende Gleichung einer Epizykloide in Parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_0 + r) \cdot \cos t - d \cdot \cos\left(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t\right) \\ (r_0 + r) \cdot \sin t - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

$y = (r_0 + r) \cdot \sin \alpha - d \cdot \cos t_1$

$y = (r_0 + r) \cdot \sin\left(\frac{r}{r_0} \cdot t\right) - d \cdot \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 + r}{r_0} \cdot t\right)\right)$

$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\Rightarrow \; y = (r_0 + r) \cdot \sin\left(\frac{r}{r_0} \cdot t\right) - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 + r}{r_0} \cdot t\right)$

Man erhält folgende Gleichung einer Epizykloide in Parameterform:

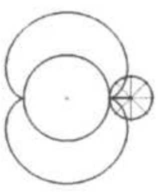
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_0 + r) \cdot \cos\left(\frac{r}{r_0} \cdot t\right) - d \cdot \cos\left(\frac{r_0 + r}{r_0} \cdot t\right) \\ (r_0 + r) \cdot \sin\left(\frac{r}{r_0} \cdot t\right) - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 + r}{r_0} \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

Nach ihrer Form unterscheidet man gestreckte, gespitzte und geschlungene Epizykloiden.

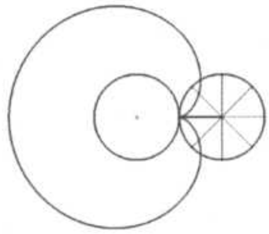
- Liegen der Mittelpunkt des ruhenden Kreises k_0 und der beobachtete Punkt des rollenden Kreises k auf verschiedenen Seiten von k (einer außen, der andere innen), so entsteht eine gestreckte Epizykloide.
- Liegt der beobachtete Punkt am Kreis k, so entsteht eine gespitzte Epizykloide.
- Liegen der Mittelpunkt des ruhenden Kreises k_0 und der beobachtete Punkt des rollenden Kreises k auf derselben Seite von k (beide außen oder beide innen), so entsteht eine geschlungene Epizykloide.

Wir verwenden im Folgenden die Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_0 + r) \cdot \cos t - d \cdot \cos\left(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t\right) \\ (r_0 + r) \cdot \sin t - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t\right) \end{pmatrix}$.

Als Sonderfälle ergeben sich



eine **Katakaustik**[5] für $d = r = \frac{r_0}{2}$

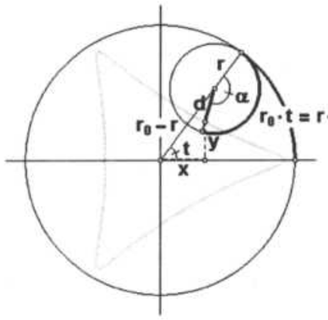


eine **Kardioide** für $d = r = r_0$

[5] Treffen parallele Strahlen auf einen Kreis-Innenrand (etwa den Rand einer Kaffeetasse), so bezeichnet man die Hüllkurve aller gespiegelten Strahlen als Katakaustik.
Diese Kurve ist eine Epizykloide, wobei der spiegelnde Kreis den Radius $2 \cdot r_0$ hat.
Für die Herleitung der Kurvengleichung siehe Grabinger 1999. S 1, S 3 - 5.
Bildquelle: http://www1.physik.tu-muenchen.de/~cucke/ftp/caustic/ (25.03.2005)

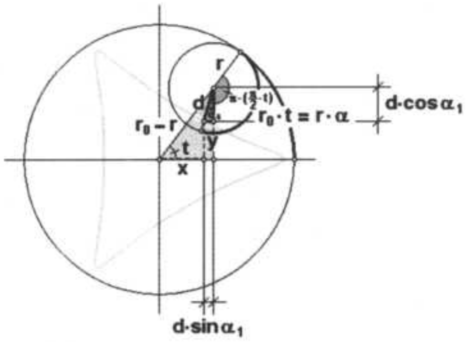
Hypozykloiden

Ein Kreis mit Radius r rollt *in* einem anderen Kreis mit Radius r_0; welche Eigenschaften gelten für die Koordinaten (x, y) eines mitbewegten Punktes im Abstand d vom Mittelpunkt des rollenden Kreises?



Wählt man den oben so bezeichneten Winkel t (im Bogenmaß gemessen) als Parameter, so ergeben sich gleiche Bogenlängen $r_0 \cdot t = r \cdot \alpha$.

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{r_0}{r} \cdot t$$



Wählt man d als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, so ergeben sich für Gegen- und Ankathete von α_1 die Längen $d \cdot \sin \alpha_1$ bzw. $d \cdot \cos \alpha_1$, wobei gilt:

$$\alpha_1 = \alpha - (\pi - (\frac{\pi}{2} - t)) = \alpha - \frac{\pi}{2} - t$$

$$\alpha_1 = \frac{r_0}{r} \cdot t - \frac{\pi}{2} - t = (\frac{r_0}{r} - 1) \cdot t - \frac{\pi}{2}$$

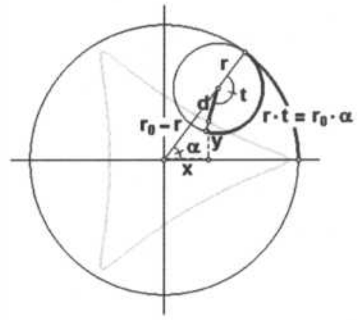
$$\alpha_1 = -(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 - r}{r} \cdot t)$$

$$x = (r_0 - r) \cdot \cos t - d \cdot \sin \alpha_1$$

$$x = (r_0 - r) \cdot \cos t + d \cdot \sin(-(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 - r}{r} \cdot t))$$

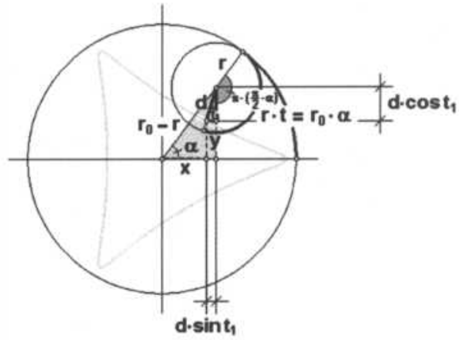
$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad x = (r_0 - r) \cdot \cos t + d \cdot \cos(\frac{r_0 - r}{r} \cdot t)$$



Wählt man den oben so bezeichneten Winkel t (im Bogenmaß gemessen) als Parameter, so ergeben sich gleiche Bogenlängen $r \cdot t = r_0 \cdot \alpha$.

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{r}{r_0} \cdot t$$



Wählt man d als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, so ergeben sich für Gegen- und Ankathete von t_1 die Längen $d \cdot \sin t_1$ bzw. $d \cdot \cos t_1$, wobei gilt:

$$t_1 = t - (\pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha)) = t - \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$t_1 = t - \frac{\pi}{2} - \frac{r}{r_0} \cdot t = (1 - \frac{r}{r_0}) \cdot t - \frac{\pi}{2}$$

$$t_1 = -(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 - r}{r_0} \cdot t)$$

$$x = (r_0 - r) \cdot \cos \alpha - d \cdot \sin t_1$$

$$x = (r_0 - r) \cdot \cos(\frac{r}{r_0} \cdot t) - d \cdot \sin(-(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 - r}{r_0} \cdot t))$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

$$\Rightarrow \quad x = (r_0 - r) \cdot \cos(\frac{r}{r_0} \cdot t) + d \cdot \cos(\frac{r_0 - r}{r_0} \cdot t)$$

$y = (r_0 - r) \cdot \sin t - d \cdot \cos \alpha_1$

$y = (r_0 - r) \cdot \sin t - d \cdot \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 - r}{r} \cdot t\right)\right)$

$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\Rightarrow \; y = (r_0 - r) \cdot \sin t - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 - r}{r} \cdot t\right)$

Man erhält folgende Gleichung einer Hypozykloide in Parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_0 - r) \cdot \cos t + d \cdot \cos\left(\frac{r_0 - r}{r} \cdot t\right) \\ (r_0 - r) \cdot \sin t - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 - r}{r} \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

$y = (r_0 - r) \cdot \sin \alpha - d \cdot \cos t_1$

$y = (r_0 - r) \cdot \sin\left(\frac{r}{r_0} \cdot t\right) - d \cdot \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{r_0 - r}{r_0} \cdot t\right)\right)$

$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\Rightarrow \; y = (r_0 - r) \cdot \sin\left(\frac{r}{r_0} \cdot t\right) - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 - r}{r_0} \cdot t\right)$

Man erhält folgende Gleichung einer Hypozykloide in Parameterform:

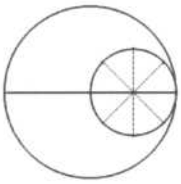
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_0 - r) \cdot \cos\left(\frac{r}{r_0} \cdot t\right) + d \cdot \cos\left(\frac{r_0 - r}{r_0} \cdot t\right) \\ (r_0 - r) \cdot \sin\left(\frac{r}{r_0} \cdot t\right) - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 - r}{r_0} \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

Nach ihrer Form unterscheidet man gestreckte, gespitzte und geschlungene Hypozykloiden.

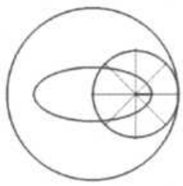
- Liegen der Mittelpunkt des ruhenden Kreises k_0 und der beobachtete Punkt des rollenden Kreises k auf verschiedenen Seiten von k (einer außen, der andere innen), so entsteht eine gestreckte Hypozykloide.
- Liegt der beobachtete Punkt am Kreis k, so entsteht eine gespitzte Hypozykloide.
- Liegen der Mittelpunkt des ruhenden Kreises k_0 und der beobachtete Punkt des rollenden Kreises k auf derselben Seite von k (beide außen oder beide innen), so entsteht eine geschlungene Hypozykloide.

Wir verwenden im Folgenden die Gleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_0 - r) \cdot \cos t + d \cdot \cos\left(\frac{r_0 - r}{r} \cdot t\right) \\ (r_0 - r) \cdot \sin t - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 - r}{r} \cdot t\right) \end{pmatrix}$.

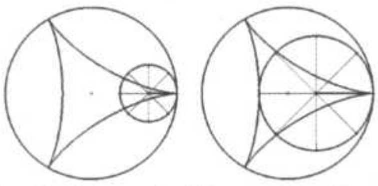
Als Sonderfälle ergeben sich



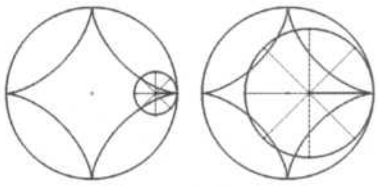
ein **Kreisdurchmesser** für $d = r = \frac{r_0}{2}$



eine **Ellipse** für $d \neq r = \frac{r_0}{2}$



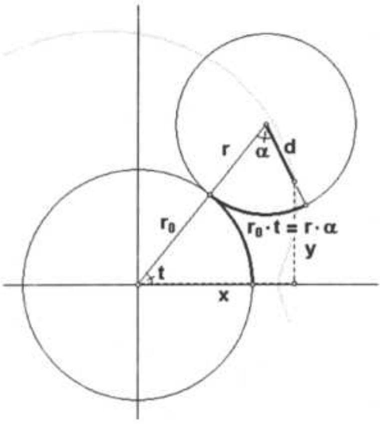
eine **Steinersche Hypozykloide** für $d = r = \frac{r_0}{3}$ oder $d = r = \frac{2 \cdot r_0}{3}$

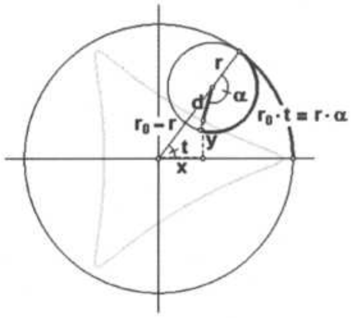


eine **Astroide** für $d = r = \frac{r_0}{4}$ oder $d = r = \frac{3 \cdot r_0}{4}$

Bei der Darstellung von Epizykloiden oder Hypozykloiden mit Hilfe von Computeralgebra-Systemen oder Tabellenkalkulations-Software ergibt sich rasch die Frage, ob bzw. wann sich eine Kurve schließt.

Die Frage nach dem „ob“ ist rasch beantwortet: für jedes rationale Verhältnis $r : r_0$ erhält man geschlossene Kurven, für irrationale Verhältnisse schließen sich entsprechende Kurven nie.[6]
Die Frage nach dem „wann“ - genauer: nach dem Parameterwert t_{end} - erfordert einige Überlegung.





Fester und bewegter Kreis haben die Umfänge $u_0 = 2\pi \cdot r_0$ bzw. $u = 2\pi \cdot r$.

Ges.: $x, y \in \mathbb{N}$: $x \cdot u_0 = y \cdot u = \mathrm{kgV}\,(u_0, u) \Rightarrow \underline{x = \frac{\mathrm{kgV}\,(u_0,u)}{u_0} = \frac{\mathrm{kgV}\,(r_0,r)}{r_0}}$

$\mathrm{kgV}\,(a,b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}\,(a,b)} \Rightarrow x = \frac{r_0 \cdot r}{\mathrm{ggT}\,(r_0,r) \cdot r_0}, \quad \underline{x = \frac{r}{\mathrm{ggT}\,(r_0,r)}}$

$x \cdot u_0 = \frac{r}{\mathrm{ggT}\,(r_0)} \cdot 2\pi \cdot r_0 = r_0 \cdot t_{end} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{t_{end} = \frac{r}{\mathrm{ggT}\,(r_0,r)} \cdot 2\pi}}$

Der Parameter t_{end} ergibt sich als Vielfaches $k \cdot 2\pi$, wobei k der Zähler des gekürzten Bruches $\frac{r}{r_0}$ ist.

analog: $\underline{y = \frac{\mathrm{kgV}\,(u_0,u)}{u} = \frac{\mathrm{kgV}\,(r_0,r)}{r} = \frac{r_0}{\mathrm{ggT}\,(r_0,r)}}$

Bsp.: $r_0 = 5,\ r = 3 \Rightarrow u_0 = 10\pi,\ u = 6\pi,\ \frac{r}{r_0} = \frac{3}{5}$

6π 6	6π 4 2	6π 6	6π 2 4	6π 6

10π	10π	10π

$\Rightarrow \underline{\underline{3}} \cdot 10\pi = 5 \cdot 6\pi, \quad t_{end} = 3 \cdot 2\pi$

Bsp.: $r_0 = 5,\ r = \frac{5}{3} \Rightarrow u_0 = 10\pi,\ u = \frac{10\pi}{3},\ \frac{r}{r_0} = \frac{1}{3}$

$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3}$

10π

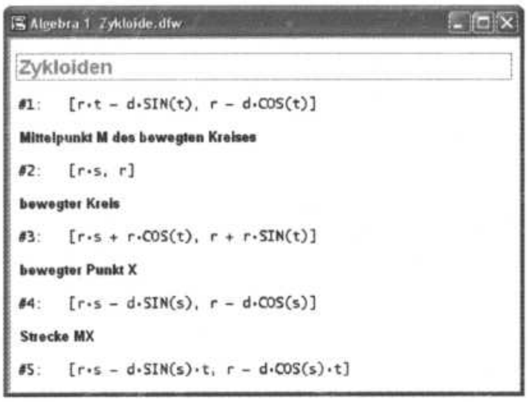
$\Rightarrow \underline{\underline{1}} \cdot 10\pi = 3 \cdot \frac{10\pi}{3}, \quad t_{end} = 1 \cdot 2\pi$

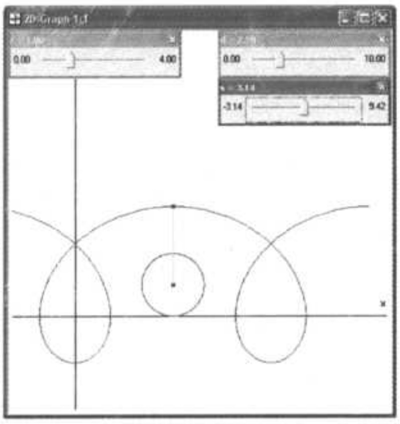
[6] Hohenberg 1966. S 258.

Computeralgebra-Systeme

Auch mit Computeralgebra-Systemen (CAS) wie Derive, Maple, Mathcad, Mathematica und anderen ist eine Darstellung von Kurven in Parameterform sowie eine Simulation von Bewegungen möglich. Voraussetzung dafür ist die Kenntnis der Gleichungen *aller* darzustellenden Objekte - also nicht nur z.B. der Gleichung einer Zykloide, sondern auch der Gleichung des rollenden Kreises bzw. der Koordinaten mitbewegter Punkte in einzelnen Positionen. Durch die Möglichkeit des symbolischen und numerischen Rechnens erlauben CAS darüber hinaus auch eine Bearbeitung vieler Fragen der traditionellen Schulmathematik, wie etwa die Ermittlung kritischer Punkte oder die Berechnung von Bogenlängen, Flächeninhalten, Rotationsvolumina und anderem, immer verbunden mit der Möglichkeit einer dynamischen grafischen Darstellung. In Derive erfolgt diese Dynamisierung mit Hilfe von Schiebereglern, wie sie ab der Version 6 zur Verfügung stehen.

Im Folgenden werden Vorschläge zur Darstellung von Zykloiden, Epizykloiden und Hypozykloiden mit Hilfe von Derive kurz beschrieben. Diese sollten interaktiv gelesen, d.h. am eigenen PC nachvollzogen und gegebenenfalls erweitert werden.





Zykloiden

1. Eingabe der Zykloidengleichung (mit Parametern r und d) als Vektor
2. neues Grafik-Fenster öffnen; Einstellen - Verzerrungsverhältnis - 1 : 1
3. Schieberegler einfügen für
   r : 0..4, 200 Intervalle und
   d: 0..10, 200 Intervalle
4. Funktionsgraph zeichnen für
   t : -π..3π
5. zusätzlich
   - Mittelpunkt M des bewegten Kreises,
   - bewegten Kreis (t: 0..2π),
   - bewegten Punkt X und
   - Strecke MX (t: 0..1) darstellen

   dafür: Gleichungen mit „Moment-Parameter" s eingeben und Schieberegler einfügen für
   s: -π..3π, 600 Intervalle
6. Bewegung durch Variation von s simulieren; Parameter variieren
7. Funktionsgraphen einbetten:
   Datei - Einbetten

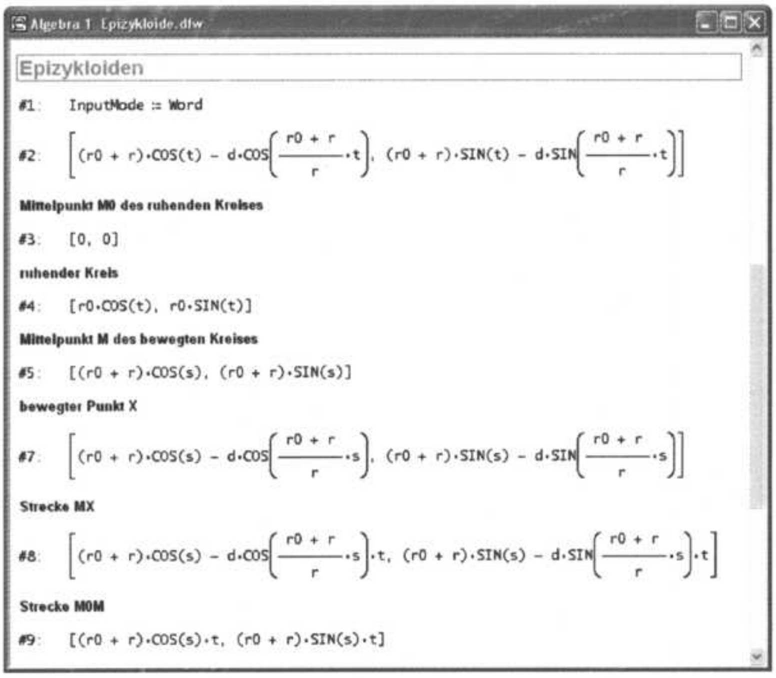
   Hinweis: *Nach Schließen des Grafik-Fensters kann dieses durch Doppelklick auf die eingebettete Grafik wieder hergestellt werden, alle Schieberegler sind jedoch neu einzufügen und neu einzustellen.*

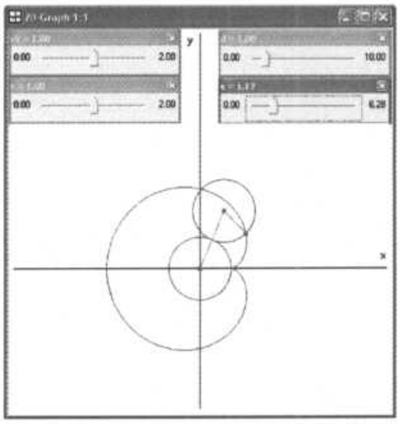
Forschungsaufgabe: Geschlungene Zykloiden besitzen Punkte unterhalb der x-Achse. Können auch die Doppelpunkte solcher Kurven unterhalb der x-Achse zu liegen kommen?

(Vermutung: Nein. Je kleiner der Wert von d wird, desto mehr nähern sich zwar die Doppelpunkte der x-Achse, die Grenze dieser Annäherung liegt jedoch bei d = r, wenn aus geschlungenen gespitzte Zykloiden werden und Doppelpunkte sich in Spitzen wandeln.)

Analog können Epizykloiden und Hypozykloiden dargestellt werden.

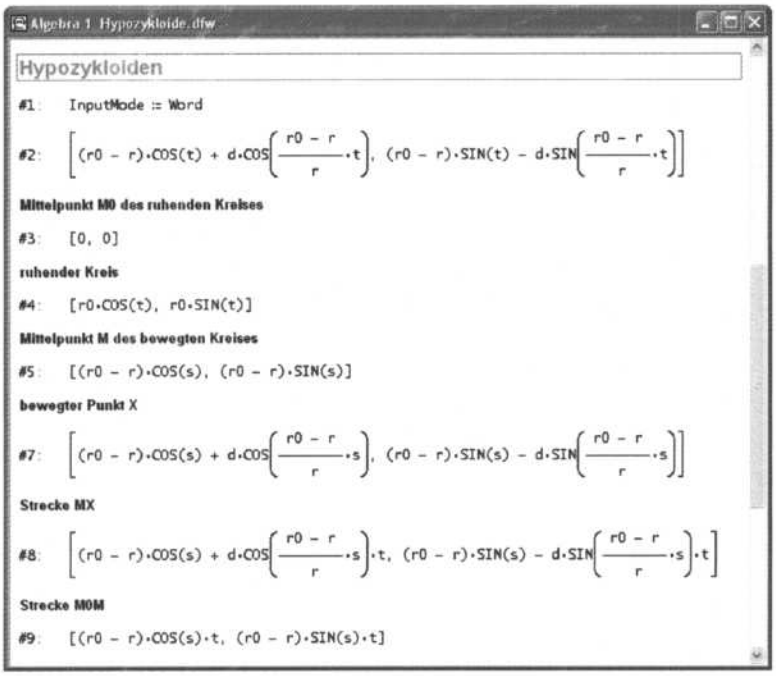
Epizykloiden

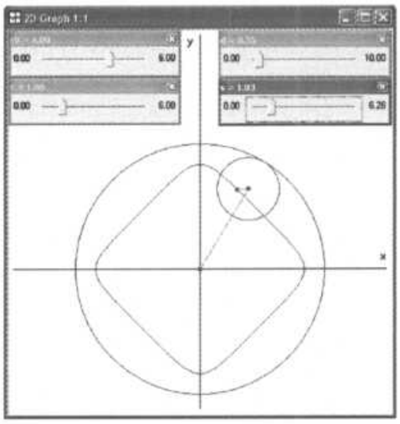




Vorschlag: Schieberegler für
r_0: 0..3, 300 Intervalle
r : 0..6, 600 Intervalle
d : 0..10, 200 Intervalle
s : 0..2π, 600 Intervalle

Hypozykloiden

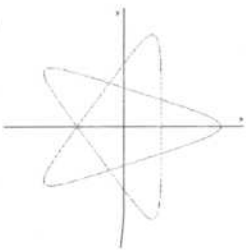




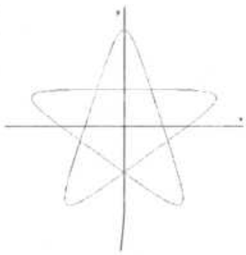
Vorschlag: Schieberegler für
r_0: 0..6, 600 Intervalle
r : 0..6, 600 Intervalle
d : 0..10, 200 Intervalle
s : 0..2π, 600 Intervalle

Forschungsaufgabe: Die folgende Abbildung (a) zeigt eine Hypozykloide in Form eines Pentagramms ($r_0 = 5$, $r = 3$, $d = 9/2$). Wie muss man die Gleichung verändern, um das Bild um 90° zu drehen (Abbildung (b))?

(a)



(b)



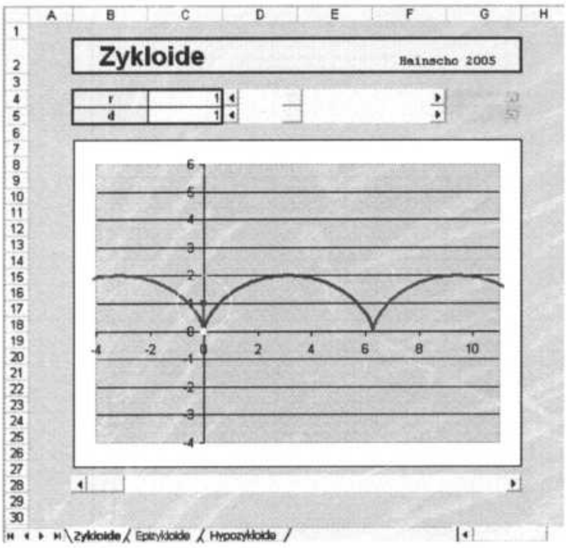
Antwort:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_0 - r)\cdot\cos(t - \frac{\pi}{2}) + d\cdot\cos(\frac{r_0 - r}{r}\cdot t - \frac{\pi}{2}) \\ (r_0 - r)\cdot\sin(t - \frac{\pi}{2}) - d\cdot\sin(\frac{r_0 - r}{r}\cdot t - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

Tabellenkalkulation

Auch mit Tabellenkalkulations-Software wie Excel ist eine Darstellung von Kurven in Parameterform sowie eine Simulation von Bewegungen möglich. Wie bei CAS ist die Voraussetzung dafür die Kenntnis der Gleichungen *aller* darzustellenden Objekte und wie bei Derive erfolgt die Dynamisierung mit Hilfe von Schiebereglern (die in der deutschen Version von Excel „Bildlaufleisten" heißen).

Im Folgenden werden Vorschläge zur Darstellung von Zykloiden, Epizykloiden und Hypozykloiden mit Hilfe von Excel kurz beschrieben. Von mäßig fortgeschrittenen Excel-Kennern sollten sie interaktiv gelesen d.h. am eigenen PC nachvollzogen und gegebenenfalls erweitert werden.



I	J	K	L	M	N	O
Zykloide						
t	x(t)	y(t)	x davor	x danach	n	dt
0	0	0	-6,28318531	6,28318531	100	0,06283185
0,06283185	4,1334E-05	0,00197327	-6,28314397	6,28322664		
0,12566371	0,00033047	0,0078853	-6,28285483	6,28351578		

Q	R	S	T	U	V	W	X
Kreis							
Nr. t_{akt}	u	v	t	x(t)	y(t)	n	dt
	0	1	0	1	1	100	0,06283185
			0,06283185	0,99802673	1,06279052		
			0,12566371	0,9921147	1,12533323		

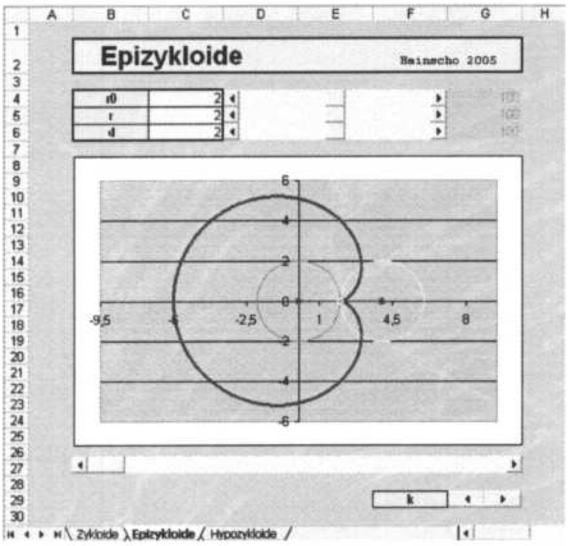
Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG
Punkt			Gerade				
x	y		t	x(t)	y(t)	n	dt
0	0		0	0	1	100	0,01
			0,01	0	0,99		
			0,02	0	0,98		

Zykloiden

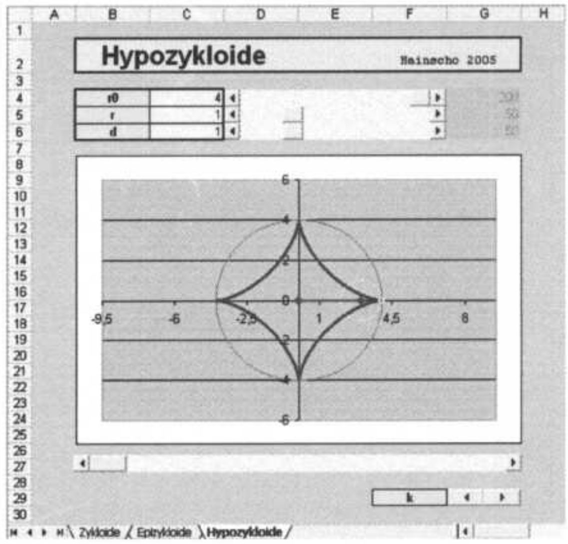
0. Steuerelement-Toolbox einblenden:
   Ansicht - Symbolleisten - Steuerelement-Toolbox
1. Erzeugung einer Bildlaufleiste für r:
   Bildlaufleiste wählen, im Entwurfsmodus zeichnen;
   rechte Maustaste - Eigenschaften:
   LinkedCell = G4, Min = 0, Max = 200, Value = 50,
   SmallChange = 5, LargeChange = 25;
   Entwurfsmodus beenden
2. Berechnung von r aus dem erhaltenen Wert i:
   Min + i · Intervallbreite / Schrittanzahl
   =0+$G$4*(4/200)
3. analog: Erzeugung einer Bildlaufleiste für d
4. Erzeugung einer Wertetabelle der Zykloide:
   - Eingabe der Punkt-Anzahl n
   - Berechnung der Schrittweite dt: =2*PI()/$N$4
   - Eingabe bzw. Berechnung von t,
     Berechnung von x(t) und y(t) sowie von x(t) ± 2π·r
5. Grafische Darstellung der Zykloide mit Hilfe des Diagramm Assistenten (3 Datenreihen):
   Punkt (XY) - Punkte mit Linien ohne Datenpunkte;
   Skalierung der Achsen vorgeben
6. analog zu oben: Erzeugung einer Bildlaufleiste für die Nummer von t_{akt}
7. Berechnung der Koordinaten von M(u/v):
   u = r · t_{akt}: =$C$4*INDIREKT(ADRESSE(4+$Q$4;9))
   v = r : =$C$4
8. Erzeugung einer Wertetabelle des Kreises:
   - Eingabe der Punkt-Anzahl n
   - Berechnung der Schrittweite dt: =2*PI()/$W$4
   - Eingabe bzw. Berechnung von t,
     Berechnung von x(t) und y(t)
9. Grafische Darstellung des Kreises sowie des Mittelpunktes M jeweils als neue Datenreihe
10. Anzeige der Koordinaten des bewegten Punktes X(x/y):
    x : =INDIREKT(ADRESSE(4+$Q$4;10))
    y : =INDIREKT(ADRESSE(4+$Q$4;11))
11. Grafische Darstellung des Punktes X als neue Datenreihe
12. Erzeugung einer Wertetabelle der Verbindung MX:
    - Eingabe der Punkt-Anzahl n
    - Berechnung der Schrittweite dt: =1/$AF$4
    - Eingabe bzw. Berechnung von t,
      Berechnung von x(t) und y(t)

Analog können Epizykloiden und Hypozykloiden dargestellt werden. Dabei empfiehlt es sich, ein zusätzliches Steuerelement („Drehfeld") für die Anzahl k der Durchläufe des Intervalls [0 ; 2π] einzufügen.

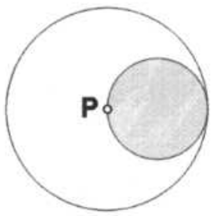
Epizykloiden



Hypozykloiden



Forschungsaufgabe: Im Bild sehen wir zwei Kreise, die einander von innen berühren. Der Radius des kleineren Kreises ist halb so groß wie der des großen. Der kleine Kreis rollt ohne zu rutschen innen am großen entlang. Welche geometrische Form hat die Bahn des Punktes P, der am Rand des kleineren Kreises befestigt ist?[7]



Antwort: P bewegt sich entlang eines Kreisdurchmessers auf und ab.

Forschungsaufgabe: Auf dem Tisch liegen zwei gleiche Münzen. Eine Münze bleibt fest, die andere wird um diese einmal herumgerollt (sie ist dann wieder in ihrer Ausgangslage). Wie viele Eigendrehungen hat sie dabei vollzogen?[8]

Antwort: Zwei Eigendrehungen.

Forschungsaufgabe: Ein Kreis mit Radius r rollt (a) außen (b) innen auf einem Kreis mit Radius n·r einmal herum. Wie oft hat er sich dabei um sich selbst gedreht?[9]

Antwort: (a) (n+1)-mal (b) (n-1)-mal.

[7] Hemme 1998. S 29, S 86 - 87. Die Frage findet sich außerdem als Aufgabe 20 im Wettbewerb *Känguru der Mathematik 2004*, Kategorie *Junior*.
[8] Diese Aufgabe samt Lösung sowie Verallgemeinerungen findet sich z.B. in Quak 1998. S 85 - 88.
[9] Hohenberg 1966. S 259.

Aufgaben und kommentierte Lösungsvorschläge

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot (t - \sin t) \\ r \cdot (1 - \cos t) \end{pmatrix}$ ist die Gleichung einer gespitzten Zykloide.

   a) Wähle geeignete Werte für r und stelle die entsprechenden Kurven grafisch dar.
   Zusatzaufgabe: Stelle auch die Rollung des bewegten Kreises dar.

   b) Zeige: die Spitzen der Zykloide liegen bei $(2k \cdot \pi \cdot r \,/\, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

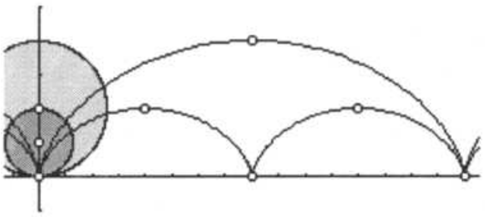
   c) Zeige: die Maxima der Kurve liegen bei $((2k+1) \cdot \pi \cdot r \,/\, 2 \cdot r)$, $k \in \mathbb{Z}$.

   d) Ermittle die Länge eines Zykloidenbogens zwischen benachbarten Spitzen.

   e) Ermittle den Flächeninhalt zwischen Zykloide und x-Achse zwischen benachbarten Spitzen.

Lösungsvorschlag

a) **Grafische Darstellung** *mit Voyage 200 (nachbearbeitet)*



```
xt1={1  2}·(t - sin(t))
yt1={1  2}·(1 - cos(t))
xt2={1  2}·cos(t)
yt2={1  2} + {1  2}·sin(t)
```

x = -1..13, y = -1..5; xscl = π/4 yscl = 1

Mit der Grafik-Funktion des Voyage 200 lassen sich zwar die gewünschten Zykloiden sowie die bewegten Kreise in „Momentaufnahmen“ (etwa in ihrer Startposition) darstellen, eine Simulation der Bewegung ist jedoch höchstens als „Daumenkino“ möglich. Andere Technologien (Cabri, Derive, Excel, ...) ermöglichen auch eine Simulation der Rollbewegung.

*Immerhin ist mit Hilfe geeigneter Technologien eine Darstellung von Kurven **vor** ihrer Diskussion möglich.*

b) **Koordinaten der Spitzen**

Spitzen: $y = 0$

$1 - \cos t = 0$

$\cos t = 1$

$t = \ldots, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots = 2k \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z}$

Alle Spitzen sind Nullstellen.

$\mathbf{S_0\ (0/0),\ S_{2\pi}\ (2\pi \cdot r/0),\ \ldots,\ S_{2k\cdot\pi}\ (2k \cdot \pi \cdot r/0)}$

Man erkennt:
Periode = Kreisumfang = $2\pi \cdot r$,
k-facher Radius ⇒ k-fache Periode

$x = r \cdot (t - \sin t) \Rightarrow \dot{x} = r \cdot (1 - \cos t)$

$y = r \cdot (1 - \cos t) \Rightarrow \dot{y} = r \cdot \sin t$

Bemerkung: $\dot{x}(2k \cdot \pi) = \dot{y}(2k \cdot \pi) = 0$

Da in den Nullstellen jeweils $\dot{x} = \dot{y} = 0$ gilt, ist der Richtungsvektor in allen diesen Punkten unbestimmt, es handelt sich also um singuläre Punkte, hier: Spitzen.

c) **Koordinaten der Maxima**

lokale Extrema: $\dot{y} = 0 \wedge \ddot{y} \neq 0$

$\sin t = 0$

$t = \ldots, 0, \pi, 2\pi, \ldots = k \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$\ddot{y} = r \cdot \cos t$

$\ddot{y}(0) = \ddot{y}(2k \cdot \pi) = r > 0 \Rightarrow$ keine Maxima

$\ddot{y}(\pi) = \ddot{y}((2k+1) \cdot \pi) = -r < 0 \Rightarrow$ lokale Maxima

$\mathbf{H_{\pi}\ (\pi \cdot r/2 \cdot r),\ H_{3\pi}\ (3\pi \cdot r/2 \cdot r),\ \ldots,\ H_{(2k+1)\cdot\pi}\ ((2k+1) \cdot \pi \cdot r/2 \cdot r)}$

Wie erwartet erhält man die Maxima der Kurve jeweils nach einer halben Umdrehung des bewegten Kreises nach jeder Startposition.

Bemerkung: $\dot{x}((2k+1) \cdot \pi) = 2 \cdot r$

d) Bogenlänge

Bogenlänge: $b = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

$\dot{x} = r \cdot (1 - \cos t), \quad \dot{y} = r \cdot \sin t$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 \cdot (1 - 2 \cdot \cos t + \underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1})$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2r^2 \cdot (1 - \cos t)$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos t)}$$

1. Summensatz: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$

Sonderfall: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\Rightarrow \quad 1 - \cos 2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2 \cdot \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \cos t = 2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}} = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{t}{2}$$

$$b = 2 \cdot r \cdot \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4 \cdot r \cdot \cos\frac{t}{2} \Bigg|_0^{2\pi} = -4 \cdot r \cdot (-1 - 1)$$

$\mathbf{b = 8 \cdot r}$

Allgemein gilt für gespitzte Zykloiden:

$$b = 2 \cdot r \cdot \int_0^{t} \sin\frac{s}{2}\, ds = -4 \cdot r \cdot \cos\frac{s}{2} \Bigg|_0^{t} = -4 \cdot r \cdot (\cos\frac{t}{2} - 1)$$

$$1 - \cos t = 2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}$$

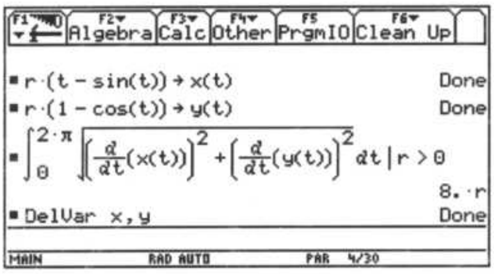
$$\Rightarrow \quad \cos t = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\frac{t}{2} = 1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{t}{4}$$

$$b = -4 \cdot r \cdot (-2 \cdot \sin^2 \frac{t}{4})$$

$$\mathbf{b = 8 \cdot r \cdot \sin^2 \frac{t}{4}} \quad | \; 0 < t \le 2\pi$$

Mit Voyage 200:



Hinweis: Für konkrete Werte von r lässt sich mit Hilfe des Grafik-Menüs die Bogenlänge auch numerisch ermitteln.

Integrale, die bei gespitzten Zykloiden auftreten, lassen sich exakt berechnen; bei gestreckten bzw. geschlungen Zykloiden ist im Allgemeinen eine numerische Lösung erforderlich.

*Die manuelle Integration erfordert unter Umständen einige **geschickte Umformungen**, aber immerhin: sie ist durchführbar.*
*Andererseits: Haben SchülerInnen eine Chance, **von sich aus** die nötigen Umformungen zu finden? Der Einsatz geeigneter Technologie verhindert zumindest ein Scheitern an diversen Integrationstechniken.*

Im Gegensatz zum hier beschrittenen traditionellen Weg - zunächst muss man eine Fertigkeit selbst beherrschen, dann erst kann man sie der Maschine überlassen - ist auch die Umkehrung möglich: zunächst haben alle SchülerInnen das Erfolgserlebnis, mit Hilfe der Maschine die gestellte Frage beantwortet zu haben, dann kann man immer noch versuchen, manuell eine Lösung zu finden.

*Die Tatsache, dass man ein Integral manuell lösen **kann**, heißt nicht automatisch, dass man es auch **will**.*
Es bleibt ein Dilemma:
Die Technologie ermöglicht einen schnellen Erfolg, ein langsamerer Weg verschafft (vielleicht) mehr Befriedigung.

Die Situation erinnert an ein fiktives Gespräch zwischen Stephen W. Hawking und Gero von Randow:

„Man hat mir gesagt, dass jede Gleichung im Buch die Verkaufszahlen halbiert. Ich beschloss also, auf mathematische Formeln ganz zu verzichten. Schließlich habe ich doch eine Ausnahme gemacht: Es handelt sich um die berühmte Einsteinsche Formel $E = mc^2$. Ich hoffe, dies wird nicht die Hälfte meiner potentiellen Leser verschrecken."

*Stephen W. **Hawking**:*
Eine kurze Geschichte der Zeit.
Reinbek bei Hamburg 1991, S 7.

„Ein paar Bemerkungen noch zum Umgang mit Formeln. *Zugegeben, Formeln sind die Geheimwaffe einer internationalen Verschwörung gegen Ihr Selbstbewusstsein.* Aber am besten tun Sie so, als würde Ihnen das nichts ausmachen, das verwirrt den Gegner. ... Wenn Sie die Formeln überspringen, entgehen Ihnen die wesentlichen Aussagen dieses Buches *nicht.* Worauf Sie dann allerdings verzichten, ist das befriedigende Gefühl, ein Problem formal gelöst zu haben. Dieses Glücksgefühl wird erzeugt, indem chemische Substanzen im Hirn ausgeschüttet werden; insofern ist dieses Erlebnis mit einem Orgasmus vergleichbar. Überlegen Sie sich das mit den Formeln also noch einmal."

*Gero von **Randow**: Das Ziegenproblem.*
Reinbek bei Hamburg 1992, S 17.

e) Flächeninhalt

Flächeninhalt: $A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} \cdot y \, dt$

$\dot{x} = r \cdot (1 - \cos t)$, $\quad y = r \cdot (1 - \cos t)$

$\Rightarrow \quad \dot{x} \cdot y = r^2 \cdot (1 - 2 \cdot \cos t + \cos^2 t)$

$$A = r^2 \cdot \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cdot \cos t + \cos^2 t \, dt$$

$$\int \underbrace{\cos t}_{f'} \cdot \underbrace{\cos t}_{g} \, dt = \sin t \cdot \cos t + \int \sin^2 t \, dt =$$

Nebenrechnung: partielle Integration

$$= \sin t \cdot \cos t + \int 1 - \cos^2 t \, dt =$$

$$= \sin t \cdot \cos t + t - \int \cos^2 t \, dt$$

$$2 \cdot \int \cos^2 t \, dt = \sin t \cdot \cos t + t$$

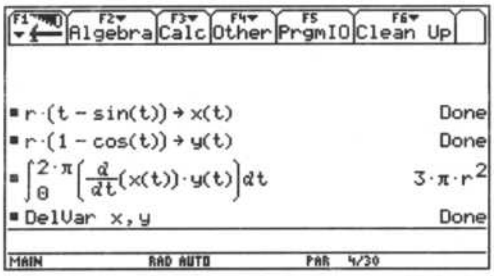
$$\int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \cdot (\sin t \cdot \cos t + t)$$

$$A = r^2 \cdot \left(t - 2 \cdot \sin t + \frac{1}{2} \cdot (\sin t \cdot \cos t + t)\right) \Bigg|_0^{2\pi} = r^2 \cdot (2\pi + \pi)$$

$$\mathbf{A = 3\pi \cdot r^2}$$

Man erkennt: Der Flächeninhalt unter einem Bogen einer gespitzten Zykloide ist dreimal so groß wie der Flächeninhalt des bewegten Kreises.

Mit Voyage 200:



2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot t - \pi \cdot \sin t \\ 2 - \pi \cdot \cos t \end{pmatrix}$ ist die Gleichung einer geschlungenen Zykloide.

a) Stelle die Kurve grafisch dar.
Zusatzaufgabe: Stelle auch die Rollung des bewegten Kreises dar.

b) Die Kurve besitzt einen Doppelpunkt auf der y-Achse; ermittle seine Koordinaten.

c) Ermittle die Gleichungen der Tangenten in D. Welche Winkel schließen sie ein?

d) Ermittle für $-\pi \le t \le \pi$ die Koordinaten der Extrema sowie der lokalen Links- und Rechtspunkte der Kurve.

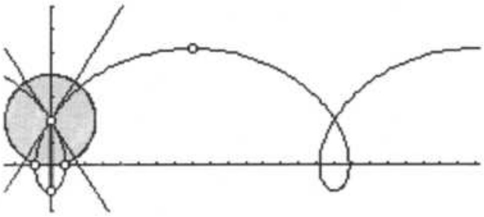
e) Ermittle die Bogenlänge einer Zykloidenschlinge.

f) Ermittle den Flächeninhalt einer Zykloidenschlinge.

g) Die Zykloidenschlinge rotiert um die y-Achse.
Ermittle Volumen und Mantelfläche des Rotationskörpers.
Zusatzaufgabe: Stelle den Rotationskörper grafisch dar.

Lösungsvorschlag

a) Grafische Darstellung *mit Voyage 200 (nachbearbeitet)*



```
xt1=2·t - π·sin(t)
yt1=2 - π·cos(t)
xt2=2·cos(t)
yt2=2 + 2·sin(t)
```

x = -2..19, y = -2..7; xscl = π/4 yscl = 1

Mit der Grafik-Funktion des Voyage 200 lassen sich zwar die gewünschten Zykloiden sowie die bewegten Kreise in „Momentaufnahmen" (etwa in ihrer Startposition) darstellen, eine Simulation der Bewegung ist jedoch höchstens als „Daumenkino" möglich. Andere Technologien (Cabri, Derive, Excel, …) ermöglichen auch eine Simulation der Rollbewegung.

*Immerhin ist mit Hilfe geeigneter Technologien eine Darstellung von Kurven **vor** ihrer Diskussion möglich.*

b) Koordinaten des Doppelpunktes

Doppelpunkt: $x = 0$

$2t - \pi \cdot \sin t = 0$

$t = \frac{\pi}{2} \cdot \sin t$

$(t_0 = 0)$, $t_{12} = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ **D(0/2)**

Die Lösungen für t sind „leicht" zu finden und durch eine einfache Probe zu bestätigen. Dies ist allerdings nur für wenige spezielle Verhältnisse d : r möglich - jeder denkbaren „einfachen" Lösung für t (π/6, π/4, π/3, π/2, …) entspricht ein solches Verhältnis. Bei Einsatz von Technologien, die numerische Lösungen liefern, sind solche Einschränkungen irrelevant.

c) Tangenten im Doppelpunkt

$x = 2 \cdot t - \pi \cdot \sin t \Rightarrow \dot{x} = 2 - \pi \cdot \cos t$
$y = 2 - \pi \cdot \cos t \Rightarrow \dot{y} = \pi \cdot \sin t$

$\dot{x}(\pm\frac{\pi}{2}) = 2$, $\dot{y}(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm\pi \Rightarrow \mathbf{t_{12}}$: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \pm\boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$

Die Ableitungen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ ergeben die Koordinaten eines Richtungsvektors.

oder

$k = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \pm\frac{\pi}{2}$, $d = 2 \Rightarrow \mathbf{t_{12}}$: $\mathbf{y = \pm\frac{\pi}{2} \cdot x + 2}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ \pi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -\pi \end{pmatrix}}{\sqrt{(4+\pi^2)^2}} = \frac{4-\pi^2}{4+\pi^2} = -0{,}423$$

$\boldsymbol{\alpha_1}$ **= 2,008 rad = 115,037°**
$\boldsymbol{\alpha_2}$ **= 1,134 rad = 64,963°**

Die beiden Winkel ergänzen sich auf π rad bzw. 180°.

d) Koordinaten von H, T, L, R

lokale Extrema: $\dot{y} = 0 \wedge \ddot{y} \neq 0$

$\sin t = 0$

$t = 0 \vee t = \pm\pi$

$\ddot{y} = \pi \cdot \cos t$

$\ddot{y}(0) = \pi > 0 \Rightarrow$ **T(0/2-π)** bzw. **T(0/-1,142)**

$\ddot{y}(\pm\pi) = -\pi < 0 \Rightarrow$ **H_{12} (±π/2+π)** bzw. **H_{12} (3,142/5,142)**

Bemerkung: $\dot{x}(0) = 2 - \pi = -1{,}142$, $\dot{x}(\pm\pi) = 2$

lokale Links- und Rechtspunkte: $\dot{x} = 0 \wedge \ddot{x} \neq 0$

$2 - \pi \cdot \cos t = 0$

$\cos t = \frac{2}{\pi}$

$t = \pm 0{,}880$

$\ddot{x} = \pi \cdot \sin t$

$\ddot{x}(-0{,}880) = -2{,}423 < 0 \Rightarrow$ **R(0,661/0)**

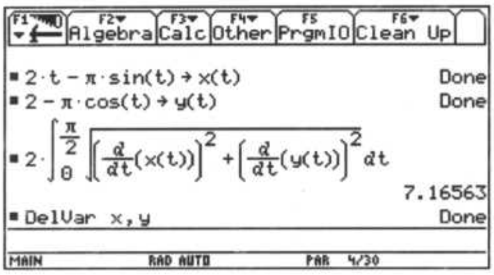
$\ddot{x}(0{,}880) = 2{,}423 > 0 \Rightarrow$ **L(-0,661/0)**

Bemerkung: $\dot{y}(-0{,}880) = -2{,}423$, $\dot{y}(0{,}880) = 2{,}423$

e) Bogenlänge *mit Voyage 200*

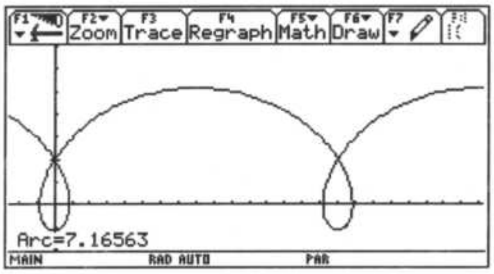
Bogenlänge: $b = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

Für $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4 + \pi^2 - 4\pi \cdot \cos t$ ist keine nahe liegende Vereinfachung möglich, die Berechnung der Bogenlänge erfolgt daher numerisch.



Bei längeren Termen empfiehlt sich eine „strukturorientierte" Eingabe anstelle der sequentiellen Form. In jedem Fall wird durch die Verwendung entsprechender Technologien die „Strukturkompetenz" stärker gefordert und gefördert als im traditionellen Unterricht.

Hinweis: Die numerische Berechnung der Bogenlänge kann auch mit Hilfe des Grafik-Menüs F5 Math - B: Arc *erfolgen.*



f) Flächeninhalt

Flächeninhalt: $A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} \cdot y \, dt$

$\dot{x} = 2 - \pi \cdot \cos t\,, \quad y = 2 - \pi \cdot \cos t$

$\Rightarrow \quad \dot{x} \cdot y = 4 - 4\pi \cdot \cos t + \pi^2 \cdot \cos^2 t$

$$A = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 - 4\pi \cdot \cos t + \pi^2 \cdot \cos^2 t \, dt$$

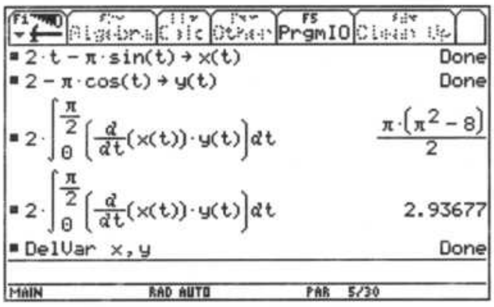
$$A = 2 \cdot \left(4t - 4\pi \cdot \sin t + \frac{\pi^2}{2} \cdot (\sin t \cdot \cos t + t)\right) \Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$A = 2 \cdot \left(2\pi - 4\pi + \frac{\pi^3}{4}\right)$$

$$\mathbf{A = \frac{\pi^3}{2} - 4\pi = 2{,}937}$$

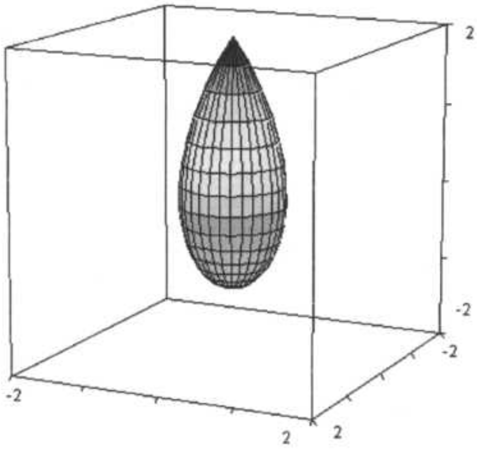
Das Integral zur Bestimmung des Flächeninhalts lässt sich auch manuell berechnen. Für die erforderliche Nebenrechnung (partielle Integration) vergleiche Aufgabe 1e).

Mit Voyage 200:



g) Rotationskörper

Grafische Darstellung *mit Derive*



Ist eine Kurve in Parameterform gegeben durch x(s) := ..., y(s) := ..., so erzeugt Derive die entsprechende Rotationsfläche bei Drehung um die y-Achse als 3D-Plot von [x(s), t, y(s)] in Zylinderkoordinaten.

Die entsprechende Rotationsfläche bei Drehung um die x-Achse erhält man als 3D-Plot von [x(s), y(s)·COS(t), y(s)·SIN(t)] in rechtwinkeligen Koordinaten.

Die Bezeichnung der Parameter kann zwar grundsätzlich frei gewählt werden, bei der Einstellung der Schranken sind jedoch die Namen s und t vorgegeben.

Volumen: $V_y = \pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} \dot{y} \cdot x^2 \, dt$

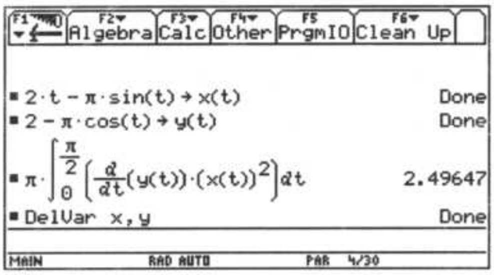
$\dot{y} = \pi \cdot \sin t, \quad x = 2 \cdot t - \pi \cdot \sin t$

$\Rightarrow \quad \dot{y} \cdot x^2 = \pi \cdot \sin t \cdot (4t^2 - 4\pi \cdot t \cdot \sin t + \pi^2 \cdot \sin^2 t)$

$\dot{y} \cdot x^2 = 4\pi \cdot t^2 \cdot \sin t - 4\pi^2 \cdot t \cdot \sin^2 t + \pi^3 \cdot \sin^3 t$

Das Integral zur Bestimmung des Volumens ließe sich zwar manuell berechnen, aber - um im Schüler-Jargon zu sprechen: Muss das sein?

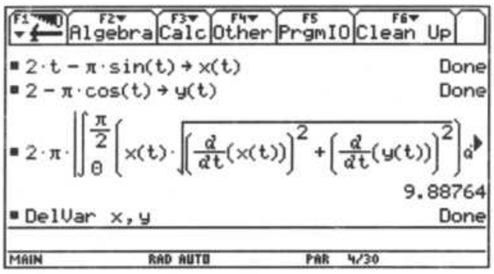
Mit Voyage 200:



Die Integration erfolgt von 0 bis π/2, da die Rotation der halben Schlinge bereits den ganzen Körper erzeugt.

Mantelfläche: $M_y = 2\pi \cdot \int_{t_1}^{t_2} x \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$

Mit Voyage 200:



3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot t - d \cdot \sin t \\ r - d \cdot \cos t \end{pmatrix}$ ist für d > r die Gleichung einer geschlungenen Zykloide.

Zeige: alle lokalen Links- und Rechtspunkte der Kurve liegen auf der x-Achse.

Lösungsvorschlag

Links- und Rechtspunkte: $\dot{x} = 0 \wedge \ddot{x} \neq 0$

$\dot{x} = r - d \cdot \cos t = y \;\Rightarrow\; \dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ □

Argumentieren und Begründen sind hier mehr gefragt als Rechnen.

Probe:

Wer nicht richtig bemerkt hat, dass die Aufgabe wirklich schon zu Ende ist, kann sich von der Probe überzeugen lassen.

$r - d \cdot \cos t = 0$

$\cos t = \frac{r}{d}$

$t = \cos^{-1}(\frac{r}{d})$

$\Rightarrow\; y = r - d \cdot \cos(\cos^{-1}(\frac{r}{d})) = r - d \cdot \frac{r}{d} = 0$ □

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot t - d \cdot \sin t \\ r - d \cdot \cos t \end{pmatrix}$ ist für d > r die Gleichung einer geschlungenen Zykloide.

Ein Doppelpunkt der Kurve liegt auf der y-Achse.

a) Zeige: Man erhält diesen Doppelpunkt stets für t-Werte $-\pi < t < \pi$.

b) Wie ist d zu wählen, damit - für ein gegebenes r - die Doppelpunkte der Kurve auf Höhe des Mittelpunktes des bewegten Kreises liegen?

c) Wie ist d zu wählen, damit - für ein gegebenes r - benachbarte Schlingen einander berühren?

Lösungsvorschlag

a) t-Werte

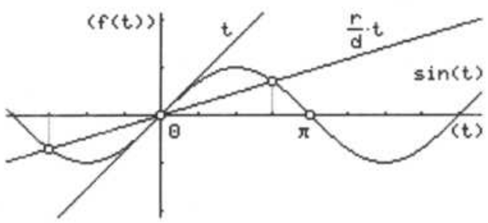
Doppelpunkt: $x = 0$

$r \cdot t - d \cdot \sin t = 0$

$\sin t = \frac{r}{d} \cdot t$

$d > r \;\Rightarrow\; \frac{r}{d} < 1$

Auch hier sind vor allem Argumentieren und Begründen gefragt.

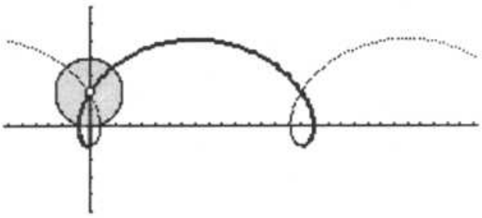


Durch die grafische Deutung lässt sich eine Aussage über die Lösungen der Gleichung treffen, ohne die Lösungen zu kennen.

Die beiden symmetrisch liegenden Lösungen liefern letztlich denselben Doppelpunkt der Zykloide.

$\Rightarrow$ symmetrische Lösungen für t-Werte $-\pi < t < \pi$ □

b) Doppelpunkt D(0/r)



1. $y = r$

$r - d \cdot \cos t = r$

$\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2}$

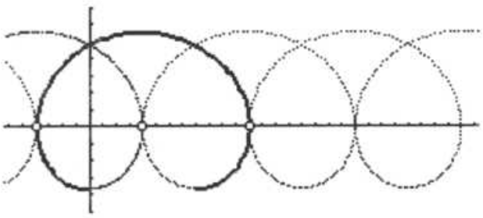
2. $x = 0$

$r \cdot \frac{\pi}{2} - d \cdot \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{1} = 0$

$\mathbf{d = \frac{\pi}{2} \cdot r}$

Mit den richtigen Ansätzen ist die Lösung kein Problem.

c) Schlingen



1. $y = 0$

$r - d \cdot \cos t = 0$

$\cos t = \frac{r}{d}$

Benachbarte Schlingen können einander nur in lokalen Links- bzw. Rechtspunkten berühren; diese liegen laut Aufgabe 3 stets auf der x-Achse.

2. $x(-t) = x(t + 2\pi)$

$-r \cdot t + d \cdot \sin t = r \cdot (t + 2\pi) - d \cdot \sin t$

$2d \cdot \sin t = 2r \cdot (t + \pi)$

$\sin t = \frac{r}{d} \cdot (t + \pi) \Rightarrow \frac{r}{d} = \frac{\sin t}{t + \pi}$

Man erinnert sich an folgende Eigenschaften der Sinus-Funktion:

$\sin(-t) = -\sin t$

$\sin(t + 2\pi) = \sin t$

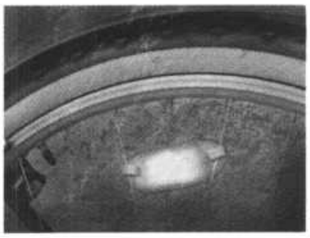
$\cos t = \frac{\sin t}{t + \pi} \Rightarrow t = 1{,}351817$

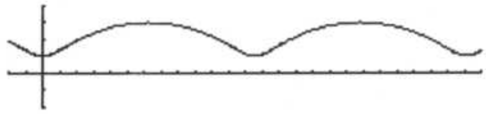
$\cos t = \frac{r}{d} \Rightarrow d = \frac{1}{\cos 1{,}351817} \cdot r$

$\mathbf{d = 4{,}603339 \cdot r}$

Für das Aufstellen einer geeigneten Gleichung war Kreativität gefragt; die Arbeit des Ausrechnens von t überlässt man nun gerne einem Rechner mit geeigneter Technologie.

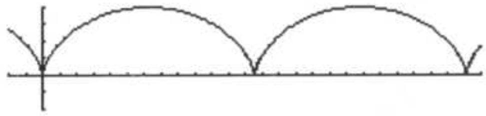
5. Forschungsaufgabe


10



Der Reflektor in den Speichen eines Fahrrads bewegt sich entlang einer gestreckten Zykloide,


11



der Reißnagel im Reifen entlang einer - dem Fahrer unangenehm - spitzen Zykloide.


12

?

Bewegen sich die Pedale auf geschlungenen Zykloiden?

Lösungshinweis

Vorsicht vor vorschnellen Antworten! Entspräche eine Umdrehung der Pedale genau einer Umdrehung der Räder, wären ihre Bahnen gestreckte Zykloiden - ihr Abstand zum Kreismittelpunkt ist ja sicher kleiner als der Abstand des Kreismittelpunktes zum Boden.
In der Praxis hängt die Antwort von der Übersetzung ab, d.h. dem eingelegten Gang.
Im Normalfall wird eine Umdrehung der Pedale mehr als eine Umdrehung der Räder bewirken, die Pedalbahnen sind also gestreckte Zykloiden, grundsätzlich ist aber jede Form möglich.
Die genaue Analyse sei dem Leser überlassen.

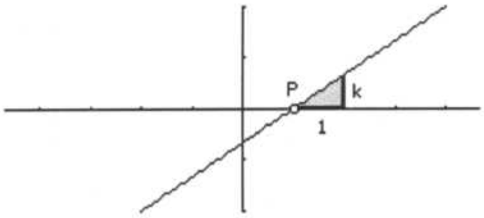
---

[10] Bildquelle:
http://www.bikestop.ch/images/startseite/reissnagel.jpg (25.03.2005)

[11] Bildquelle:
http://www.bikestop.ch/images/startseite/reissnagel.jpg (25.03.2005)

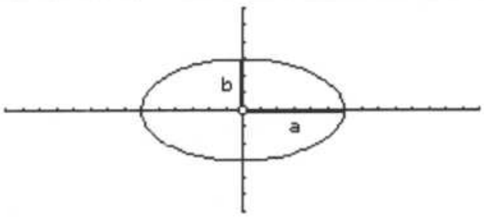
[12] Bildquelle:
http://www.hburk.de/assets/images/db_images/db_kettler-city-comf-2d1.jpg (25.03.2005)

Gerade



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P + t \\ y_P + k \cdot t \end{pmatrix}$$

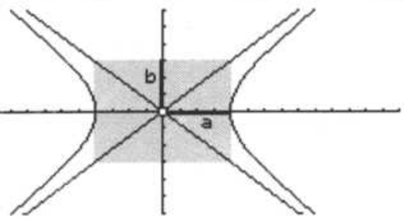
Kreis & Ellipse



Kreis: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \end{pmatrix}$

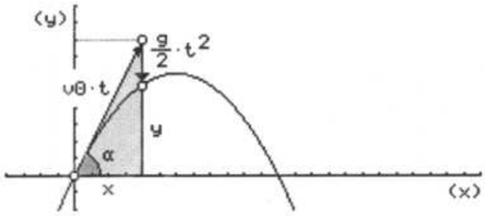
Ellipse: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$

Hyperbel



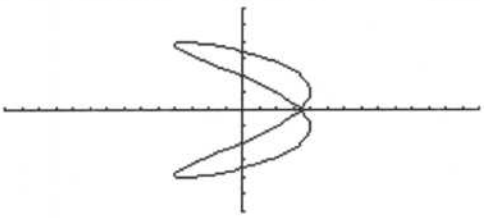
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cosh t \\ b \cdot \sinh t \end{pmatrix} \quad \textit{oder} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sin t} \\ \frac{b}{\tan t} \end{pmatrix}$$

Wurfparabel



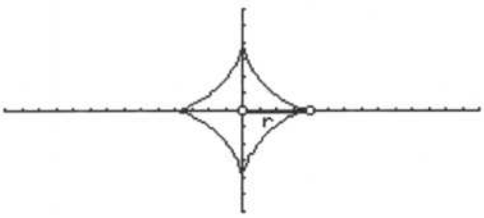
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot (\cos\alpha) \cdot t \\ v_0 \cdot (\sin\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

Lissajou-Figur



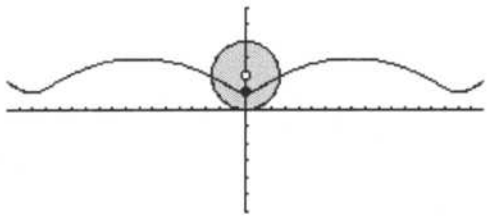
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p_1} \cdot t\right) \\ a_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p_2} \cdot t - \varphi\right) \end{pmatrix}$$

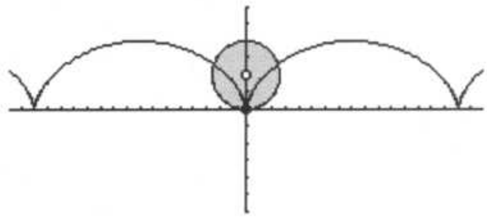
Astroide

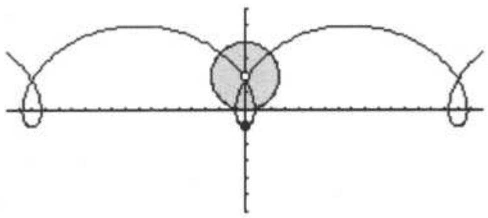


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3r}{4} \cdot \cos t + \frac{r}{4} \cdot \cos 3t \\ \frac{3r}{4} \cdot \sin t - \frac{r}{4} \cdot \sin 3t \end{pmatrix}$$

Zykloide



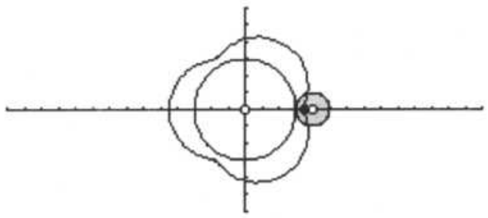


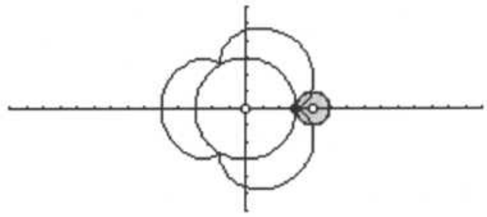


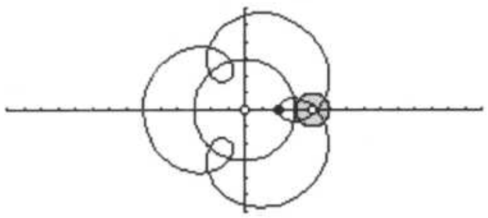
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot t - d \cdot \sin t \\ r - d \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

gestreckte Zykloide: $d < r$
gespitzte Zykloide: $d = r$
geschlungene Zykloide: $d > r$

Epizykloide

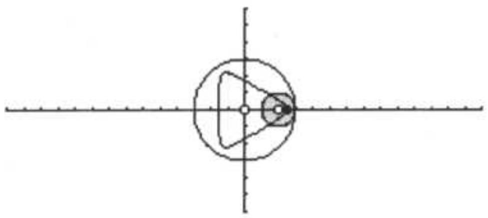


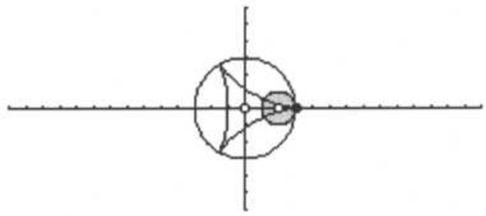


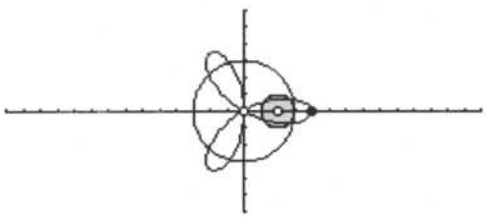


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_0 + r) \cdot \cos t - d \cdot \cos\left(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t\right) \\ (r_0 + r) \cdot \sin t - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 + r}{r} \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

Hypozykloide







$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_0 - r) \cdot \cos t + d \cdot \cos\left(\frac{r_0 - r}{r} \cdot t\right) \\ (r_0 - r) \cdot \sin t - d \cdot \sin\left(\frac{r_0 - r}{r} \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

Ausblicke

Wer sich umfassender informieren möchte, findet es vielleicht interessant, sich mit folgenden Fragen bzw. Themen zu befassen, die hier nur angedeutet werden.

Evolute

Als Evolute einer Kurve bezeichnet man die Menge aller ihrer Schmiegekreis-Mittelpunkte. Ein „Schmiegekreis" liegt vor, wenn im Berührpunkt von Kurve und Kreis sowohl die Funktionswerte als auch erste und zweite Ableitung übereinstimmen.

Die Zykloide ist eine der wenigen Kurven, die als Evolute eine kongruente Kurve besitzen.

Anti-Zykloide

Welche Form muss eine Straße haben, sodass ein Punkt eines Rades, das auf dieser Straße rollt, sich auf einer Geraden bewegt? Diese Frage führt zur Anti-Zykloide (beschrieben in Dirnböck 1985).

Kinematik

Rollungen sind ein Thema der kinematischen Geometrie. In ihrem Sinne spricht man von zyklischen Bewegungen, wenn feste und bewegte Polkurve Kreise bzw. Kreis und Gerade sind.

Astronomie

Die Planetenbahnen am Fixsternhimmel weisen teilweise rückläufige bzw. schleifenförmige Bewegungen auf. Eudoxos von Knidos versuchte dies im 4. Jh. v. Chr. durch eine Anordnung konzentrischer Sphären zu erklären, die sich gleichzeitig um verschiedene Achsen drehen.

Andere Astronomen, vor allem Apollonios von Perge, Hipparchos von Nikaia und Klaudios Ptolemaios von Alexandria, entwarfen immer feinere Systeme von Epizykelbahnen, wobei man teilweise davon ausging, dass der Mittelpunkt dieses Systems seinerseits um die Erde kreist.

Offen bleibt die Frage, wie sehr neben dem Drang nach Wissen auch die Astrologie als Geldquelle an der Entwicklung solcher Modelle beteiligt war.

Literatur

Gedrucktes

- Hans **Dirnböck**: Die Kreisrollung mit einer gegebenen geraden Bahn (Die Antizykloidenbewegung). Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades. Klagenfurt 1985.

- Klaus **Freyer**, Rainer **Gaebler**, Werner **Möckel**: Gut gedacht ist halb gelöst. 200 Knobeleien. Herrsching 1989 <Pawlak (Lizenzausgabe)>.

- Benno **Grabinger**: Mathematik in der Kaffeetasse. In: TI-Nachrichten 2/99.

- Heinrich **Hemme**: Das Problem des Zwölf-Elfs. 100 mathematische Rätsel mit ausführlichen Lösungen. Göttingen 1998 <Vandenhoeck & Ruprecht>

- Fritz **Hohenberg**: Konstruktive Geometrie in der Technik. Wien, New York 1966 (3. Aufl.) <Springer>.

- Gert **Kadunz**: Kurven in der Ebene und im Raum. Diplomarbeit zur Erlangung des Lehramtes an höheren Schulen. Klagenfurt 1984.

- Hermann **Kautschitsch**: Der Videofilm - Geeignetes Mittel zur Visualisierung und Entwicklung mathematischer Begriffe und Modelle. In: Hermann **Kautschitsch**, Wolfgang **Metzler** (Hrsg.): Anschauung und mathematische Modelle. 4. Workshop zur „Visualisierung in der Mathematik“ in Klagenfurt vom 16. bis 21. Juli 1984.
  Wien, Stuttgart 1985 <Hölder-Pichler-Tempsky / B. G. Teubner>.

- Udo **Quak** (Hrsg.): Die Fundgrube für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin 1998 <Cornelsen Scriptor>

- Julius **Schärf**: Mathematik für Höhere Technische Lehranstalten - Formelsammlung. Wien 1982 <Oldenbourg>

- Gudrun **Wolfschmidt** (Hrsg.): Nicolaus Copernicus. Revolutionär wider Willen. Stuttgart 1994 <Verlag für Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik>

Internet

- Hans-Jürgen **Elschenbroich**: Ebene Geometrie & Computer.
  http://elschenbroich.bei.t-online.de/themen/geomet.htm (25.03.2005)

- Jutta **Gut**: Die Zykloide und verwandte Kurven.
  http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/zykl1.htm (25.03.2005)

- Julia **Krause**: Rollkurven und ihre Didaktik. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe II. Bonn 2004
  http://schule.mupad.de/material/sonstiges/RollkurvenJuliaKrause.pdf (25.03.2005)

- Thomas **Paulsen**: Falscher Ansatz - geniale Idee. Wie vor 2000 Jahren Planetenbahnen berechnet wurden.
  http://www.ruhr-uni-bochum.de/php-bin/advkalcontent-2004.php?tag=16 (14.01.2005)

Freeware

- **Spirograph *Java Applet*** - Download als Zip-Datei.
  http://wordsmith.org/anu/java/spirograph.zip (25.03.2005)

- **Maus-Spirograph *JavaScript*** - Download des Quelltextes.
  http://www.jswelt.de/index.php?opencat=JavaScripts&artid=1008577999 (25.03.2005)